



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Dinámica de funciones holomorfas del disco unitario

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
JUAN ANTONIO VIVANCO CONTULIANO

Profesor Guía: Dr. Gerardo Honorato.

Cotutor: Dr. Rodrigo Hernández

VALPARAÍSO
DICIEMBRE 2020

Agradecimientos

Quiero expresar mi profunda gratitud a: Mi familia, por estar constantemente apoyando cada decisión que he tomado a lo largo de mis años. A Milena por acompañarme en este proceso. Al Dr. Rafael Labarca por los consejos, enseñanzas y recomendaciones. A mis compañeros del Magister, con quienes pasamos largas horas estudiando, en especial a O'bryan. Agradezco también a mi profesor guía Dr. Gerardo Honorato, por su dedicación, orientación y correcciones constantes. A Dios por su infinita misericordia.

Resumen

En este trabajo se estudia la dinámica de funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es el disco unitario. En particular estudiamos la dinámica de *funciones Inner* y su función de borde f^* inducida en $\partial\mathbb{D}$. Más precisamente, nuestro problema se centra en estudiar la teoría ergódica de la función de borde f^* .

Comenzamos con los aspectos clásicos de la teoría ergódica: existencia de medidas invariantes (teorema de Bogolyubov- Krylov), ergodicidad, exactitud, teorema de recurrencia de Poincaré y teorema de Birkhoff. Posterior a esto se estudian herramientas del análisis complejo tales como transformaciones de Möbius, automorfismos del disco; funciones armónicas y el problema de Dirichlet. Finalmente estudiamos la medida armónica en S^1 , la extensión armónica en L^1 y los límites no tangenciales. El resultado principal que se prueba en la tesis es un teorema clásico de Aaronson que dice que cuando la función inner tiene un punto fijo en el interior del disco unitario, entonces la medida armónica es invariante para la función inner. Más aún, veremos la demostración de Aaronson-Pommerenke sobre la ergodicidad y exactitud.

Índice general

1. Introducción	1
2. Teoría Ergódica	3
2.1. Medidas invariantes	3
2.1.1. Teorema de recurrencia de Poincaré	9
2.2. Teorema de Bogoliubov-Krilov	11
2.2.1. Topología débil*	11
2.2.2. La topología débil* es metrizable	13
2.2.3. La topología débil* es compacta	15
2.3. Ergodicidad	22
3. Transformaciones de Möbius	40
4. Problema de Dirichlet	58
4.1. Funciones Armónicas	58
4.2. Funciones Armónicas sobre el Disco	61
5. La dinámica de Funciones Inner	69
5.1. Funciones Inner	69
5.2. Límite no tangencial y extensión armónica	76
5.3. Teorema de Denjoy-Wolff	89
5.4. Ergodicidad de funciones inner	95
A. Elementos Básicos de Teoría de la Medida	100
A.1. Espacios medibles	100
A.2. Espacios de medida	101
A.3. Funciones medibles	103

B. Integración en Espacios de Medida	105
B.1. Integral de Lebesgue	105
B.2. Teorema de convergencia	106
C. Convergencia de Productos	108
D. Diferenciación	110
E. Medidas en Espacios Métricos	113
E.1. Espacios métricos completos separables	113
E.2. Espacio de funciones continuas	113

Capítulo 1

Introducción

El objetivo que persigue la tesis está orientado al estudio de la dinámica de aplicaciones holomorfas en el disco unitario, y al estudio de la medida armónica en el círculo unitario como medida invariante para funciones inner. Para esto se estudia la dinámica de funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, donde $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ es el disco unitario. En este sentido si consideramos las funciones f^n , donde f^n denota la composición de f , n -veces con $n = 1, 2, \dots$ el teorema de Denjoy-Wolff (5.3.1) nos garantiza que para todo $z \in \mathbb{D}$ existe un punto $p \in \overline{\mathbb{D}}$, tal que $f^n(z)$ converge al punto p uniformemente sobre conjuntos compactos.

Consideraremos λ la medida de Lebesgue en el círculo unitario $S^1 = \partial\mathbb{D}$. Una *función Inner* es una función holomorfa $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, donde $\lim_{r \rightarrow 1} f(rw) = f^*(w) \in \partial\mathbb{D}$ λ -c.t.p. para $w \in \partial\mathbb{D}$. La aplicación f^* inducida en $\partial\mathbb{D}$ es llamada *función de borde*.

En el caso de la función de borde $f^* : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ la dinámica puede ser bastante complicada ya que puede ser discontinua, la medida invariante puede ser infinita y de hecho los teoremas clásicos de teoría ergódica pueden no ser óptimos. Por ejemplo el teorema de Birkhoff puede fallar para medidas infinitas. Sin embargo, abordar la dinámica de f^* desde un punto del análisis complejo puede llevarnos a recuperar algunos de esos resultados, por lo cual nuestro problema se centra en estudiar la teoría ergódica para la función f^* . En particular, el teorema 5.4.1 nos dice que si f es una función inner, entonces hablar de ergodicidad y la exactitud es lo mismo para f^* .

La tesis está estructurada de la siguiente forma. En el capítulo 2 se estudian los aspectos básicos de la teoría ergódica: medidas invariantes y ejemplos de estas; Teorema de recurrencia de Poincaré; Teorema de Bogoliubov-Krilov, que en particular nos garantiza la existencia de una medida de probabilidad invariante en un espacio mé-

trico compacto y se finaliza con caracterizaciones de ergodicidad. En el capítulo 3 se estudian las propiedades asociadas a las transformaciones de Möbius. En el capítulo 4 daremos solución al problema de Dirichlet. En el capítulo 5 se estudian funciones inner, límites no tangenciales, teorema de Denjoy-Wolf, y la ergodicidad de funciones inner.

El resultado principal es que cuando la función inner tiene un punto fijo en el interior del disco unitario, entonces la medida armónica es invariante para la aplicación. Más aún, es ergódica y exacta.

Capítulo 2

Teoría Ergódica

En el presente capítulo se estudiarán los conceptos básicos de la teoría Ergódica. Se comenzará estudiando medidas invariantes para luego estudiar el teorema de recurrencia de Poincaré, algunos aspectos de la topología débil*, la demostración del Teorema de Bogoliubov-Krilov y enunciaremos el teorema de Birkhoff.

2.1. Medidas invariantes

Definición 2.1.1 Sea $(M, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida y $f : M \rightarrow M$ una función medible. Diremos que la medida μ es invariante bajo f (o μ es f -invariante, o que f preserva μ) si

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)) \text{ para cada conjunto medible } E \subset M \quad (2.1)$$

Proposición 2.1.1 Sea $f : M \rightarrow M$ una función medible y μ una medida sobre M . Entonces f preserva μ si y solo si

$$\int \phi d\mu = \int \phi \circ f d\mu \quad (2.2)$$

para cada función μ -integrable $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Demostración: Si μ es una medida invariante bajo f y $\mathcal{X}_B$ es la función característica de un conjunto medible B , entonces se tiene que:

a) $\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$ para cada conjunto medible $B \subset M$.

b) $\mu(B) = \int \mathcal{X}_B d\mu$ y $\mu(f^{-1}(B)) = \int \mathcal{X}_{f^{-1}(B)} d\mu = \int (\mathcal{X}_B \circ f) d\mu$.

De a) y b) tenemos que

$$\int \mathcal{X}_B d\mu = \int (\mathcal{X}_B \circ f) d\mu.$$

Esto nos indica que (2.2) es válido para la función característica.

Probemos que (2.2) se cumple para funciones simples. Si $s_n = \sum_{j=1}^k \alpha_{nj} \mathcal{X}_{A_{nj}}$ una función simple, entonces

$$\begin{aligned} \int s_n d\mu &= \sum_{j=1}^k \alpha_{nj} \mu(A_{nj}) \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_{nj} \int \mathcal{X}_{A_{nj}} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^k \alpha_{nj} \int (\mathcal{X}_{A_{nj}} \circ f) d\mu \\ &= \int \sum_{j=1}^k \alpha_{nj} (\mathcal{X}_{A_{nj}} \circ f) d\mu \\ &= \int \left(\left(\sum_{j=1}^k \alpha_{nj} \mathcal{X}_{A_{nj}} \right) \circ f \right) d\mu \\ &= \int s_n \circ f d\mu. \end{aligned}$$

Para finalizar, probemos que (2.2) se cumple para funciones integrables. Sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función μ -integrable. Por proposición A.3.2 existe una sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples, convergente a ϕ tal que $|s_n(x)| \leq |\phi(x)|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, usando el teorema de la convergencia dominada dos veces:

$$\int \phi d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (s_n \circ f) d\mu = \int (\phi \circ f) d\mu.$$

Esto muestra que (2.2) se cumple para toda función integrable si μ es invariante.

Por otra parte, si suponemos que se cumple (2.2) y consideramos $\phi = \mathcal{X}_B$ la función característica de un conjunto medible B , entonces tenemos que

$$\int \mathcal{X}_B d\mu = \int \mathcal{X}_B \circ f d\mu \tag{2.3}$$

donde f es una función medible y μ una medida sobre M . Al reemplazar $\int \mathcal{X}_B d\mu =$

$\mu(B)$ y $\int \mathcal{X}_B \circ f d\mu = \mu(f^{-1}(B))$ en (2.3) se tiene que

$$\mu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Con lo cual μ es f -invariante para cada conjunto medible $B \subset M$. Hemos finalizado la prueba de la proposición.

A continuación probaremos que si μ es f invariante para alguna álgebra que genere a $\mathcal{B}$, entonces μ es f invariante en $\mathcal{B}$.

Lema 1 Sea $f : M \rightarrow M$ una función medible y μ una medida finita sobre M . Supongamos que existe alguna álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos medibles de M tal que $\mathcal{A}$ genera la σ -álgebra $\mathcal{B}$ de M y $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para cada $E \in \mathcal{A}$. Entonces μ es invariante bajo f .

Demostración: Sea $\mathcal{C} = \{E \in \mathcal{B} : \mu(E) = \mu(f^{-1}(E))\}$. Veamos que $\mathcal{C}$ es de clase monótona:

a) Sea $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ sucesión creciente de elementos de $\mathcal{C}$ y $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Además, si consideramos $E_1 = A_1, E_j - E_{j-1} = A_j$ entonces $E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ y $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, donde $A_j \cap A_i \neq \emptyset$ para $i \neq j$. Luego, como μ es una medida finita, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

De manera similar se obtiene que

$$\mu(f^{-1}(E)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-1}(E_n)).$$

Además, como $E_n \in \mathcal{C}$ entonces $\mu(E_n) = \mu(f^{-1}(E_n))$. Con lo cual

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-1}(E_n)) = \mu(f^{-1}(E)).$$

Por lo tanto, $E \in \mathcal{C}$.

- b) Análogamente podemos mostrar que la intersección de una sucesión decreciente de elementos de $\mathcal{C}$ está en $\mathcal{C}$.

De a) y b) concluimos que $\mathcal{C}$ es una clase monótona. Utilizando el teorema A.2.2 de la clase monótona se tiene que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Con lo cual $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

Ejemplos:

1. Sea

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

Veamos que f preserva la medida de Lebesgue m . Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces $f^{-1}([a, b]) = [a - 1, b - 1]$, luego

$$m(f^{-1}([a, b])) = m([a - 1, b - 1]) = b - a = m([a, b]).$$

Por otra parte, si suponemos que f tiene un punto recurrente x en $\mathbb{R}$, es decir, existe una sucesión $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{n_j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x) = x,$$

pero $\lim_{n_j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x) = \lim_{n_j \rightarrow \infty} x + n_j = \infty$. Por lo tanto, f no tiene punto recurrente en $\mathbb{R}$. Utilizando el contrarecíproco del teorema de recurrencia de Poincaré (ver [7]) f no puede admitir una medida finita invariante.

2. Considere la aplicación $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $f(x) = rx - [rx]$, donde $r \in \mathbb{N}$. Mostraremos que f preserva la medida de Lebesgue m .

Veamos primero que f es como se muestra en la figura 2.1.

Para eso notemos que en el eje x existen r puntos donde $f(x) = 0$,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow rx - [rx] = 0 \\ &\Leftrightarrow rx = [rx] \\ &\Leftrightarrow rx = n, n \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{n}{r}, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

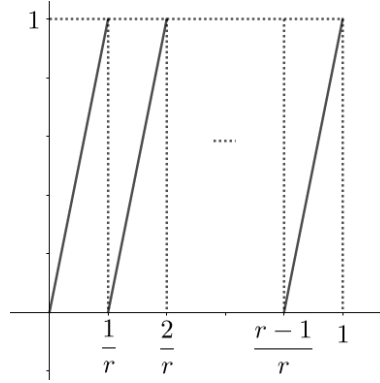


Figura 2.1

Como $x \in [0, 1]$ entonces $n \in \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$. Luego existen r puntos donde $f(x) = 0$. Podemos ver que existen r intervalos de la forma $I_k = \left[\frac{k}{r}, \frac{k+1}{r} \right]$, con $k \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Por otra lado, si $[a, b] \subset [0, 1]$ entonces

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}([a, b]) &\Leftrightarrow f(x) \in [a, b] \\ &\Leftrightarrow a \leq rx - [rx] \leq b \\ &\Leftrightarrow \frac{a + [rx]}{r} \leq x \leq \frac{b + [rx]}{r} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a + [rx]}{r}\right) &= a + [rx] - [a + [rx]] \\ &= a + [rx] - [rx] \\ &= a, \end{aligned}$$

y

$$f\left(\frac{b + [rx]}{r}\right) = b,$$

donde $[rx] \in \{0, 1, \dots, r-1\}$. Con esto tenemos que $f^{-1}([a, b]) = \bigcup_{i=0}^{r-1} \left[\frac{a+i}{r}, \frac{b+i}{r} \right]$.

Veamos en segunda instancia que f preserva la medida de Lebesgue m .

$$\begin{aligned}
 m(f^{-1}[a, b]) &= m\left(\bigcup_{i=0}^{r-1} \left[\frac{a+i}{r}, \frac{b+i}{r}\right]\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{r-1} m\left(\left[\frac{a+i}{r}, \frac{b+i}{r}\right]\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{b-a}{r} \\
 &= b-a \\
 &= m([a, b]).
 \end{aligned}$$

Hemos probado que m es invariante bajo f para conjuntos del álgebra $\mathcal{A}$, que está formada por la unión finita de intervalos cerrados de $[0, 1]$. Utilizando el lema 1 hemos probando que la medida de Lebesgue es invariante bajo f .

3. La aplicación $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-x), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

preserva la medida de Lebesgue, pues

$$\begin{aligned}
 \lambda(f^{-1}[0, a]) &= \lambda\left(\left[0, \frac{a}{2}\right] \cup \left[1 - \frac{a}{2}, 1\right]\right) \\
 &= \lambda\left(\left[0, \frac{a}{2}\right]\right) + \lambda\left(\left[1 - \frac{a}{2}, 1\right]\right) \\
 &= \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \\
 &= \lambda([0, a]).
 \end{aligned}$$

4. La transformación de Gauss $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$, preserva la medida μ dada por

$$\mu(A) = \frac{1}{\log(2)} \int_A \frac{1}{1+t} dt.$$

Para cada $[a, b] \subset [0, 1]$ se tiene que $f^{-1}([a, b]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i+b}, \frac{1}{i+a} \right]$. Con lo cual,

$$\begin{aligned}
 \mu(f^{-1}[a, b]) &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i+b}, \frac{1}{i+a} \right]\right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(\left[\frac{1}{i+b}, \frac{1}{i+a} \right]\right) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\log(2)} \left(\log\left(1 + \frac{1}{i+b}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{i+a}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{\log(2)} \log\left(\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{i+b}}{1 + \frac{1}{i+a}}\right) \\
 &= \frac{1}{\log(2)} \log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{i+a}{i+b} \cdot \frac{i+1+b}{i+1+a}\right) \\
 &= \frac{1}{\log(2)} \log\left(\frac{1+a}{1+b}\right) \\
 &= \frac{1}{\log(2)} \int_a^b \frac{dt}{1+t} \\
 &= \mu([a, b]).
 \end{aligned}$$

Utilizando el lema 1 hemos probado que la medida μ es invariante bajo f .

2.1.1. Teorema de recurrencia de Poincaré

Teorema 2.1.1 (*Recurrencia de Poincaré*) Sea $f : M \rightarrow M$ una función medible y μ una medida finita invariante bajo f . Sea $E \subset M$ un conjunto medible con $\mu(E) > 0$. Entonces, para casi todo punto $x \in E$ existen infinitos valores de n para los cuales $f^n(x)$ están en E .

Demostración: Sea $E \subset M$ un conjunto medible con $\mu(E) > 0$. Entenderemos que x retornará a E cuando exista n tal que $f^n(x) \in E$. Denotamos por E_0 al conjunto de puntos $x \in E$ que nunca retornarán a E . Veamos que:

1. La intersección $f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0)$ es vacía para todo $m > n \geq 1$.

Supongamos que existe $m > n \geq 1$ tal que $f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0)$ es distinto de vacío. Sea $x \in f^{-n}(E_0) \cap f^{-m}(E_0)$ e $y = f^n(x)$. Entonces $y \in E_0$. Como $x \in E_0$ eso significa que $y = f^n(x) \in E_0$. Además $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E_0$, ya que $E_0 \subset E$. Es decir y

retorna a E al menos una vez, lo cual es una contradicción con la definición de E_0 .

2. $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)$ para todo $n \geq 1$.

Como μ es invariante bajo f , tenemos que se cumple para $n = 1$. Supongamos que es verdadera para $n = k$ y probemos que se cumple para $n = k + 1$.

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$\mu(f^{-k}(f^{-1}(E_0))) = \mu(f^{-1}(E_0)) = \mu(E_0),$$

con lo cual $\mu(f^{-n}(E_0)) = \mu(E_0)$ se cumple para cualquier $n \geq 1$.

3. $\mu(E_0) = 0$.

Utilizando 1. y 2. podemos ver que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-n}(E_0)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0). \end{aligned}$$

Como μ es una medida finita, tenemos que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E_0)) \leq \mu(M) < \infty$. Si $\mu(E_0) \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_0)$ sería infinito, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $\mu(E_0) = 0$.

4. Veamos que si F denota el conjunto de puntos $x \in E$ que retornan a E un número finito de veces, entonces $\mu(F) = 0$.

Por definición cada punto $x \in F$ tiene algún iterado $f^k(x) \in E_0$. Es decir,

$$F \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0).$$

Como μ es invariante bajo f , entonces

$$\mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f^{-k}(E_0)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(f^{-k}(E_0)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(E_0) = 0.$$

Por lo tanto, $\mu(F) = 0$

5. Si E_1 es el conjunto de los puntos que retornan un número infinito de veces a E

entonces $E_1 = E - (F \cup E_0)$. Además

$$\mu(E) = \mu((E_1 \cup F \cup E_0) = \mu(E_1).$$

De 5. se puede observar que la medida del conjunto de puntos que retornan un número infinito de veces a E es igual a la medida de E , es decir, para casi todo punto $x \in E$ existen infinitos valores de n para los cuales $f^n(x)$ estará en E .

2.2. Teorema de Bogoliubov-Krilov

En esta sección demostramos un teorema que garantiza la existencia de medidas invariantes para aplicaciones continuas en espacios métricos compactos.

2.2.1. Topología débil*

Sea M un espacio métrico. Definiremos la topología débil* en el conjunto $\mathcal{M}_1(M)$ de las medidas de probabilidad de Borel sobre M .

Definición 2.2.1 Sea $d(\cdot, \cdot)$ la distancia sobre M y $B(x, \delta)$ denotará la bola de centro $x \in M$ y radio $\delta > 0$. Dado $B \subset M$, se define

$$d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\}.$$

Llamaremos δ -vecindad de B al conjunto B^δ de puntos $x \in M$ con $d(x, B) < \delta$.

Definición 2.2.2 Sea una medida $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$, un conjunto finito $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ de funciones continuas acotadas $\phi_i : M \rightarrow \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$. Considere el conjunto

$$V(\mu, \Phi, \epsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1(M) : \left| \int \phi_i d\nu - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon \text{ para cada } i \right\}.$$

La topología débil* es la topología definida por las bases $\{V(\mu, \Phi, \epsilon) : \Phi, \epsilon\}$ para cada $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$.

Observación:

1. Los conjuntos abiertos en la topología débil* son conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(M)$ tal que para cada $\mu \in \mathcal{A}$ existe algún conjunto $V(\mu, \Phi, \epsilon)$ contenido en $\mathcal{A}$.

2. La definición solo depende de la topología de M y no de la distancia.
3. Esta topología es Hausdorff.

El siguiente lema caracteriza la convergencia en la topología débil*.

Lema 2 *Una sucesión $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una medida $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ en la topología débil* si y solamente si*

$$\int \phi d\mu_n \rightarrow \int \phi d\mu \text{ para cada función continua acotada } \phi : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea $\Phi = \{\phi\}$ en donde ϕ es una función continua acotada. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$, en la topología débil*, entonces para algún $\epsilon > 0$ existe $m \geq 1$ tal que $\mu_n \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$ para cada $n \geq m$. Esto significa que

$$\left| \int \phi d\mu_n - \int \phi d\mu \right| < \epsilon \text{ para cada } n \geq m.$$

En otras palabras, la sucesión $(\int \phi d\mu_n)_n$ converge a $\int \phi d\mu$.

($\Leftarrow$) Sea el conjunto $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ donde ϕ_i es una función continua y acotada. Por hipótesis $(\int \phi d\mu_n)_n$ converge a $\int \phi d\mu$ para cada función continua y acotada ϕ entonces, para cada $i \in \{1, \dots, N\}$ tendremos que dado $\epsilon > 0$, existe $n_i \geq 1$ tal que

$$\left| \int \phi_i d\mu_m - \int \phi_i d\mu \right| < \epsilon \text{ para todo } m \geq n_i$$

Tomando $\bar{n} = \max\{n_1, \dots, n_N\}$ se tiene que $\mu_m \in V(\mu, \Phi, \epsilon)$ para cada $m \geq \bar{n}$.

Observación: La topología débil* se puede obtener tomando las bases de vecindades de familias de los siguientes conjuntos, ver [7],

1. $V(\mu, \Psi, \epsilon) = \{\eta \in \mathcal{M}_1(M) : |\int \psi_i d\eta - \int \psi_i d\mu| < \epsilon \text{ para cada } i\}$. Donde $\epsilon > 0$ y $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ es una familia de funciones Lipschitz.
2. Dada una familia $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$ de conjuntos cerrados de M y dado un $\epsilon > 0$, consideramos

$$V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_1 : \nu(F_i) < \mu(F_i) + \epsilon \text{ para cada } i\}.$$

3. Dada una familia $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$ de conjuntos abiertos de M y dado $\epsilon > 0$ consideramos

$$V_a(\mu, \mathcal{A}, \epsilon) = \{v \in \mathcal{M}_1 : v(A_i) < \mu(A_i) - \epsilon \text{ para cada } i\}.$$

4. Dada una familia $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_N\}$ de conjuntos continuos de μ y $\epsilon > 0$, consideramos

$$V_c(\mu, \mathcal{B}, \epsilon) = \{v \in \mathcal{M}_1 : |\mu(B_i) - v(B_i)| < \epsilon \text{ para cada } i\}.$$

2.2.2. La topología débil* es metrizable

Consideremos M un espacio métrico separable y $\mathcal{M}_1(M)$ el conjunto de las medidas de probabilidad de Borel sobre M .

Definición 2.2.3 Dado $\mu, v \in \mathcal{M}_1(M)$, y para todo conjunto de Borel $B \subset M$ definiremos la distancia de Levy-Prohorov como,

$$D(\mu, v) = \inf \left\{ \delta > 0 : (\forall B \subset M) \left(\mu(B) < v(B^\delta) + \delta \quad \text{y} \quad v(B) < \mu(B^\delta) + \delta \right) \right\}.$$

Una prueba de que D es una distancia se puede encontrar en [7].

Definición 2.2.4 Sea B un subconjunto de Borel de M y μ una medida sobre M . Se dice que B es un conjunto continuo de μ si cumple que

$$\mu(\partial B) = 0$$

donde ∂B es la frontera de B .

Proposición 2.2.1 Si M es un espacio métrico separable entonces la topología inducida por la distancia Levy-Prohorov D coincide con la topología débil* sobre $\mathcal{M}_1(M)$.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$ una familia finita de subconjuntos cerrados de M . Fijamos $\delta \in (0, \frac{\epsilon}{2})$ tal que $\mu(F_i^\delta) + \delta < \mu(F_i) + \frac{\epsilon}{2}$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Si $v \in B_D(\mu, \delta)$ entonces

$$\mu(F_i^\delta) + \delta < \mu(F_i) + \epsilon \quad \text{para cada } i.$$

Luego,

$$\nu(F_i) < \mu(F_i) + \epsilon.$$

Es decir, $\nu \in V_f(\mu, \mathcal{F}, \epsilon)$. Esto muestra que la topología inducida por la distancia D es más gruesa que la topología débil*.

Ahora mostraremos que si M es separable, entonces la topología débil* es más gruesa que la topología inducida por D . Para esto sea $\{p_1, p_2, \dots\}$ cualquier subconjunto denso numerable de M . Dado $\epsilon > 0$, fijamos $\delta \in (0, \frac{\epsilon}{3})$. Para cada j , se tiene que $\partial B(p_j, r) = \{x : d(x, p_j) = r\}, r > 0$ son disjuntos. Así, podemos encontrar $r > 0$ arbitrariamente pequeño tal que $\mu(\partial B(p_j, r)) = 0$ para cada j . Fijamos r , de tal manera que $r \in (0, \frac{\delta}{3})$. La familia $\{B(p_j, r) : j = 1, 2, \dots\}$ es un recubrimiento contable de M por conjuntos de continuidad de μ . Sea $k \geq 1$ tal que el conjunto $U = \bigcup_{j=1}^k B(p_j, r)$ satisface

$$\mu(U) > 1 - \delta. \quad (2.4)$$

A continuación consideremos la partición $\mathcal{P}$ de U definida por la familia de bolas

$$\{B(p_j, r) : j = 1, 2, \dots, k\}.$$

Es decir, los elementos de $\mathcal{P}$ son conjuntos maximales $P \subset U$ tal que, para cada j , P está contenido en $B(p_j, r)$ o P es disjunto de $B(p_j, r)$. Ahora sea E la familia de todas las uniones finitas de elementos de $\mathcal{P}$. Note que la frontera de E tiene medida cero, ya que está contenido en la unión de las fronteras de las bolas $B(p_j, r), 1 \leq j \leq k$. Es decir, cada elemento de E es un conjunto continuo de μ .

Si $\nu \in V_c(\mu, E, \delta)$ entonces

$$|\mu(A) - \nu(A)| < \delta \quad \text{para cada } A \in E. \quad (2.5)$$

En particular, (2.4) junto a (2.5) implica que

$$\nu(U) > 1 - 2\delta. \quad (2.6)$$

Ahora, dado un subconjunto de borel B , denotamos por E_B la unión de todos los ele-

mentos de $\mathcal{P}$ que intersectan B . Entonces $E_B \in E$, y así por la relación (2.5) se obtiene

$$|\mu(E_B) - \nu(E_B)| < \delta.$$

Observemos que B está contenido en $E_B \cup U^c$. Además $E_B \subset B^\delta$, ya que cada elemento de $\mathcal{P}$ tiene diámetro menor que $2r < \delta$. Este hecho, junto con (2.4) y (2.6), implican que

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leq \mu(E_B) + \delta < \nu(E_B) + 2\delta \leq \nu(B^\delta) + 2\delta, \\ \nu(B) &\leq \nu(E_B) + 2\delta < \mu(E_B) + 3\delta \leq \mu(B^\delta) + 3\delta. \end{aligned}$$

Como $3\delta < \epsilon$, entonces $\nu \in B_D(\mu, \epsilon)$. Con lo que se ha probado la proposición.

2.2.3. La topología débil* es compacta

Consideraremos M un espacio métrico compacto.

Teorema 2.2.1 *El espacio $\mathcal{M}_1(M)$ es compacto para la topología débil*.*

Como sabemos que $\mathcal{M}_1$ es metrizable, es suficiente probar que:

Proposición 2.2.2 *Cada sucesión $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}_1(M)$ tiene alguna subsucesión que converge en la topología débil*.*

Demostración: Sea $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso contable de la bola unitaria de $C^0(M)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de números reales $\int \phi_n d\mu_k, k \in \mathbb{N}$ es acotada por 1. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una sucesión $(k_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\int \phi_n d\mu_{k_j^n} \text{ converge a } \Phi_n \in \mathbb{R}, \text{ cuando } j \rightarrow \infty.$$

Además, cada sucesión $(k_j^{n+1})_{j \in \mathbb{N}}$ puede ser escogida como subsucesión de $(k_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$. Definimos $l_j = k_j^j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Por construcción, $(l_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de cada $(k_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$. Por lo tanto,

$$\left(\int \phi_n d\mu_{l_j} \right)_j \rightarrow \Phi_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Luego, podemos deducir que

$$\Phi(\varphi) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{l_j} \quad (2.7)$$

existe, para cada función $\varphi \in C^0(M)$. En efecto, supongamos primero que φ está en la bola unitaria de $C^0(M)$. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi - \phi_n\| < \epsilon$. Entonces,

$$\left| \int \varphi d\mu_{l_j} - \int \phi_n d\mu_{l_j} \right| \leq \epsilon$$

para cada j . Como $\int \phi_n d\mu_{l_j}$ converge a Φ_n , se sigue que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{l_j} - \liminf_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{l_j} \leq 2\epsilon.$$

Como ϵ es arbitrario, hemos probado que $\lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{l_j}$ existe. Esto demuestra que (2.7) se cumple cuando la función está en el disco unitario. El caso general se obtiene reemplazando φ por $\frac{\varphi}{\|\varphi\|}$. Considerando esto, hemos probado (2.7).

Finalmente, $\Phi : C^0(M) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por (2.7) es lineal y positivo, en efecto $\Phi(\varphi) \geq \min \varphi \geq 0$ donde $\varphi \geq 0$ en todo punto. Además $\Phi(1) = 1$. Esto se debe a que $\int \varphi d\mu_{l_j} = \int 1 d\mu_{l_j} = 1$. Así, por teorema E.2.1, existe una medida de probabilidad μ sobre M tal que $\Phi(\varphi) = \int \varphi d\mu$, para cada función continua φ . Ahora, podemos escribir (2.7) como

$$\int \varphi d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int \varphi d\mu_{l_j} \quad \text{para cada } \varphi \in C^0(M).$$

De acuerdo al lema 2, esto significa que la sucesión $(\mu_{l_j})_{j \in \mathbb{N}}$ converge a μ en la topología débil*.

Definición 2.2.5 Sean $f : M \rightarrow M$ una función continua y η una medida sobre M , denotamos por $f_*\eta$ y lo llamamos el iterado (imagen o pullback) de η bajo f , a la medida definida por

$$f_*\eta(B) = \eta(f^{-1}(B))$$

para cada conjunto medible $B \subset M$.

Note que la medida η es invariante bajo f si y solamente si $f_*\eta = \eta$.

Teorema 2.2.2 (Teorema de Bogoliubov-Krilov) *Si $f : M \rightarrow M$ es una función continua sobre un espacio métrico compacto. Entonces existe al menos una medida de probabilidad sobre M invariante bajo f .*

Demostración: Para demostrar este teorema utilizaremos 3 lemas.

Lema 3 *Sea η una medida y ϕ una función medible acotada. Entonces*

$$\int \phi df_*\eta = \int \phi \circ f d\eta. \quad (2.8)$$

Demostración:

1. Al considerar la función característica $\mathcal{X}_B$ se tiene que

$$\mathcal{X}_B \circ f = \mathcal{X}_{f^{-1}(B)}.$$

2. Si ϕ es la función característica sobre un conjunto medible B , entonces

$$\begin{aligned} \int \phi df_*\eta &= \int \mathcal{X}_B df_*\eta \\ &= f_*\eta(\mathcal{X}_B) \\ &= \eta(f^{-1}(\mathcal{X}_B)) \\ &= \int \mathcal{X}_{f^{-1}(B)} d\eta \\ &= \int \mathcal{X}_B \circ f d\eta \\ &= \int \phi \circ f d\eta. \end{aligned}$$

3. Utilizando lo anterior junto a la linealidad de la integral en la función simple

$\phi = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int \phi \, d f_* \eta &= \int \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{X}_{A_i} \right) d f_* \eta \\
 &= \sum_{i=1}^k \int \mathcal{X}_{A_i} \, d f_* \eta \\
 &= \sum_{i=1}^k \int \mathcal{X}_{A_i} \circ f \, d \eta \\
 &= \int \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{X}_{A_i} \right) \circ f \, d \eta \\
 &= \int \phi \circ f \, d \eta.
 \end{aligned}$$

4. Si ahora ϕ es una función medible y acotada, entonces por proposición A.3.2 existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples que converge uniformemente a ϕ , tal que $|s_n(x)| \leq |\phi(x)|$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, utilizando teorema de la convergencia dominada,

$$\begin{aligned}
 \int \phi \, d f_* \eta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \, d f_* \eta \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n \circ f \, d \eta \\
 &= \int \phi \circ f \, d \eta.
 \end{aligned}$$

Esto finaliza la demostración del lema 3. Ahora probaremos el siguiente resultado.

Lema 4 Si $f : M \rightarrow M$ es continua entonces $f_* : \mathcal{M}_1(M) \rightarrow \mathcal{M}_1(M)$ es continua con respecto a la topología débil*.

Demostración: Sea $\epsilon > 0$ y $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ una familia de funciones continuas y acotadas. Si f es continua, entonces la familia $\Psi = \{\phi \circ f, \dots, \phi_n \circ f\}$ también es una familia de funciones continuas y acotadas. Por el lema 3

$$\left| \int \phi_i \, d(f_* \mu) - \int \phi_i \, d(f_* \nu) \right| = \left| \int (\phi_i \circ f) \, d\mu - \int (\phi_i \circ f) \, d\nu \right|. \quad (2.9)$$

Como $f_* v \in V(f_* \mu, \Phi, \epsilon)$ entonces

$$\left| \int \phi_i d(f_* \mu) - \int \phi_i d(f_* v) \right| < \epsilon.$$

Luego por (2.9)

$$\left| \int (\phi_i \circ f) d\mu - \int (\phi_i \circ f) dv \right| < \epsilon,$$

Es decir, $v \in V(\mu, \Psi, \epsilon)$. En resumen

$$f_*(V(\mu, \Psi, \epsilon)) \subset V(f_* \mu, \Phi, \epsilon) \text{ para cada } \mu, \Phi \text{ y } \epsilon.$$

Por lo tanto, f_* es relativamente continua a la topología débil* y hemos probado el lema 4.

A continuación construiremos una medida de probabilidad μ , y en el lema 5 veremos que es invariante. Sea ν una medida de probabilidad sobre M . Formamos la sucesión de medidas de probabilidad

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j \nu, \quad (2.10)$$

donde f_*^j es la imagen de ν bajo el iterado f^j . Dado que $\mathcal{M}_1(M)$ es compacto con la topología débil*, entonces existe un punto de acumulación para esta sucesión, es decir, existe una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y alguna medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}_1(M)$ tal que

$$\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu \rightarrow \mu \quad (2.11)$$

en la topología débil*. Ahora veremos que μ es una medida de probabilidad invariante bajo f .

Lema 5 *Cada punto de acumulación de una sucesión $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forma (2.10) es una medida de probabilidad invariante bajo f .*

Demostración: Por (2.11) tenemos que, dada una familia $\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ de funciones continuas acotadas y $\epsilon > 0$, entonces

$$\left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ f^j) dv - \int \phi_i d\mu \right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad (2.12)$$

para cada i y cada k suficientemente grande. Además por (2.11)

$$f_*\mu = f_*\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu\right). \quad (2.13)$$

Luego, para $B \subset M$ medible se tiene que

$$\begin{aligned} f_*\left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu\right)(B) &= \left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu\right)(f^{-1}(B)) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu(f^{-1}(B)) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \nu(f^{-j-1}(B)) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^{j+1} \nu(B) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} f_*^j \nu(B). \end{aligned}$$

Esto implica que

$$f_*\left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu\right) = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} f_*^j \nu \quad (2.14)$$

Utilizando (2.13) y (2.14) se tiene que

$$f_*\mu = f_*\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f_*^j \nu\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} f_*^j \nu. \quad (2.15)$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ f^j) d\nu - \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ f^j) d\nu \right| &= \frac{1}{n_k} \left| \int \phi_i d\nu - \int (\phi_i \circ f^{n_k}) d\nu \right| \\ &\leq \frac{2}{n_k} \sup |\phi_i|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Luego, para i y k suficientemente grande, la expresión en (2.16) es menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Así,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \int (\phi_i \circ f^j) dv - \int \phi_i d\mu \right| &= \left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ f^j) dv - \int \phi_i d\mu \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n_k} \int (\phi_i \circ f^{n_k}) dv - \frac{1}{n_k} \int \phi_i dv \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \int (\phi_i \circ f^j) dv - \int \phi_i d\mu \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{n_k} \int (\phi_i \circ f^{n_k}) dv - \frac{1}{n_k} \int \phi_i dv \right| \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

para i y k suficientemente grande. Esto significa que

$$\frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} f_*^j v \rightarrow \mu,$$

cuando $k \rightarrow \infty$. De (2.15) esta sucesión converge a $f_*\mu$. Por unicidad del límite, se muestra que $f_*\mu = \mu$. Finalizando la demostración del lema 5.

En conclusión, hemos encontrado una medida de probabilidad sobre M que es invariante bajo f . Finalizando la demostración del teorema 2.2.2.

A continuación enunciamos el importante teorema de Birkhoff. Su demostración es extensa y escapa al objetivo de la tesis. Sin embargo, puede ser encontrada en [7].

Teorema 2.2.3 (Birkhoff) *Sea $f : M \rightarrow M$ una función medible y μ una medida de probabilidad invariante bajo f . Dada una función integrable $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, el límite*

$$\tilde{\varphi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe en μ -casi todo punto $x \in M$. Además, la función $\tilde{\varphi}$ satisface

$$\int \tilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

Observación: $\tilde{\varphi}$ es llamado tiempo promedio de φ .

2.3. Ergodicidad

En esta sección estudiaremos equivalencias de ergodicidad. Además se probará que la aplicación de Gauss y el Shift de Bernoulli son aplicaciones ergódicas.

Definición 2.3.1 Diremos que un conjunto medible $B \subset M$ es invariante si la función característica $\mathcal{X}_B$ es una función invariante.

Definición 2.3.2 Sea $T : X \rightarrow X$ aplicación medible de un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Diremos que

- a) T es ergódica si para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $T^{-1}(A) = A$ se tiene que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.
- b) T es exacta si para todo $A \in \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(\mathcal{A})$ se tiene que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Observación: Si la aplicación es exacta entonces es ergódica. Esto se debe a que $T^{-1}(A) = A$ implica que $T^{-n}(A) = A$ para todo $n \geq 0$, y entonces $A \in \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(\mathcal{A})$. Luego $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Definición 2.3.3 Sea el conjunto medible $E \subset M$, $x \in E$ y $f : M \rightarrow M$ una función medible. Definiremos

$$\tau(E, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(f^j(x)),$$

donde $\mathcal{X}_E$ es la función característica de E .

Definición 2.3.4 Una función medible $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es invariante si $\varphi = \varphi \circ f$ en μ -casi todo punto.

Las siguientes afirmaciones nos permiten caracterizar la ergodicidad.

Proposición 2.3.1 Sea μ una medida de probabilidad invariante de una función medible $f : M \rightarrow M$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1) Para cada conjunto medible $B \subset M$ se tiene $\tau(B, x) = \mu(B)$ para μ -casi todo punto.
- (2) Para cada conjunto medible $B \subset M$ la función $\tau(B, \cdot)$ es constante en μ -casi todo punto.
- (3) Para cada función integrable $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene $\tilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu$ para μ -casi todo punto.

- (4) Para cada función integrable $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ el tiempo promedio $\tilde{\varphi} : M \rightarrow \mathbb{R}$ es constante en μ – casi todo punto.
- (5) Para cada función integrable invariante $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene $\psi(x) = \int \psi d\mu$ para μ – casi todo punto.
- (6) Toda función integrable invariante $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ es constante en μ -casi todo punto.
- (7) Para cada subconjunto invariante A tenemos que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Demostración: (1) implica (2). En efecto, para cada conjunto medible $B \subset M$ la relación

$$\begin{aligned} \tau(B, \cdot) : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \tau(B, x) = \mu(B) \end{aligned}$$

es función constante.

De manera similar se tiene que (3) implica (4) y (5) implica (6).

(5) implica (3). Al considerar la función integrable $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, por (5) tendremos que $\varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$, en μ – casi todo punto, y luego

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \varphi d\mu \\ &= \int \varphi d\mu. \end{aligned}$$

- (6) implica (4). Como $\tilde{\varphi}$ es una función invariante e integrable (ver [7]), tenemos que $\tilde{\varphi}(x) = c$ para μ casi todo punto $x \in M$, y algún $c \in \mathbb{R}$.
- (3) implica (1). Para la función integrable $\varphi = \mathcal{X}_E$ se tiene que el

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$ en μ casi todo punto, con lo cual

$$\begin{aligned} \tau(E, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \\ &= \int \varphi d\mu \\ &= \int \mathcal{X}_E d\mu \\ &= \mu(E). \end{aligned}$$

(4) implica (2). Basta con considerar $\varphi = \mathcal{X}_E$ en la hipótesis. Por lo tanto $\tilde{\varphi}(x) = \tau(B, x)$ es constante.

(2) implica (7). Sea A un conjunto invariante entonces $\mathcal{X}_A(f^j(x)) = \mathcal{X}_A(x)$. Con lo anterior se tiene que

$$\begin{aligned} \tau(A, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_A(f^j(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_A(x) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

Aplicando teorema de Birkhoff a la función característica $\mathcal{X}_A$ obtenemos que $\int \tau(A, x) d\mu(x) = \mu(A)$. Por hipótesis $\tau(A, \cdot)$ es constante en μ -casi todo punto, y así $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

(7) implica (5). Sea Ψ una función integrable invariante. Se demostrará que cada conjunto

$$B_c = \{x \in M : \Psi(x) \leq c\}$$

es un conjunto invariante. Sea $f : M \rightarrow M$ función medible y $x \in f^{-1}(B_c)$. Esto significa que $f(x) \in B_c$ con lo cual $\Psi(f(x)) \leq c$. Como Ψ es invariante entonces $\Psi(x) \leq c$ y así $x \in B_c$. Por otro lado, si $x \in B_c$ entonces $\Psi(x) \leq c$, y como Ψ es invariante tenemos que $\Psi(f(x)) \leq c$. Esto significa que $f(x) \in B_c$, y por lo tanto $x \in f^{-1}(B_c)$.

Por otra parte, para cada $c < d$ se tiene que $B_c \subset B_d$ y así, $\mu(B_c) < \mu(B_d)$. Luego existe $\bar{c} \in \mathbb{R}$ tal que $\mu(B_c) = 0$, para cada $c < \bar{c}$, y $\mu(B_c) = 1$ para cada $c \geq \bar{c}$.

De esta forma $\Psi = \bar{c}$ para μ – casi todo punto. Por lo tanto $\int \Psi d\mu = \bar{c}$ y así $\Psi = \int \Psi d\mu$ en μ – casi todo punto. Esto concluye la demostración.

Definición 2.3.5 Sea $(M, \mathcal{B})$ un espacio medible, $f : M \rightarrow M$ una función medible y μ una medida f – invariante. Se define el operador de Koopman de (f, μ) como el operador lineal

$$U_f : L^1(\mu) \rightarrow L^1(\mu), \quad U_f(\phi) = \phi \circ f.$$

Teorema 2.3.1 Sea μ una medida de probabilidad invariante de una transformación medible $f : M \rightarrow M$. Las siguientes condiciones son equivalentes

(1) (f, μ) es ergódica.

(2) Para un par de conjuntos medibles A y B se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B). \quad (2.17)$$

(3) Para una función $\varphi \in L^p(\mu)$ y $\psi \in L^q(\mu)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (U_f^j \varphi) \psi d\mu = \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \quad (2.18)$$

Demostración:

(3) $\Rightarrow$ (2). Primero notemos que $\mathcal{X}_A$ y $\mathcal{X}_B$ pertenecen a $L^p(\mu)$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} \int_M |\mathcal{X}_A|^p d\mu &= \int_A |1|^p d\mu \\ &= \mu(A) < 1. \end{aligned}$$

Si $\varphi = \mathcal{X}_A$ y $\psi = \mathcal{X}_B$, entonces

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (U_f^j \varphi) \psi d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (U_f^j \mathcal{X}_A) \mathcal{X}_B d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (\mathcal{X}_A \circ f^j) \mathcal{X}_B d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (\mathcal{X}_{f^{-j}(A)}) \mathcal{X}_B d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int \mathcal{X}_{f^{-j}(A) \cap B} d\mu \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap B) d\mu.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \int \varphi d\mu \int \psi d\mu &= \int \mathcal{X}_A d\mu \int \mathcal{X}_B d\mu \\
 &= \mu(A)\mu(B)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por hipótesis (2.19) y (2.20) son iguales. Por lo tanto (3) implica (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea A un conjunto invariante. Luego

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A \cap A) \quad (A \text{ es invariante}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(A) \\
 &= \mu(A).
 \end{aligned}$$

Si consideramos $A = B$ en la hipótesis, entonces $\mu(A) = \mu(A)^2$. Por lo tanto $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$. En conclusión (f, μ) es ergódica.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sea $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu), \psi \in \mathcal{L}^q(\mu)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por el teorema ergódico de Birkhoff $\tilde{\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi$ y por proposición 2.3.1 parte (3) se tiene que $\tilde{\varphi} = \int \varphi d\mu$.

Por lo tanto

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi \rightarrow \int \varphi d\mu \quad \text{en } \mu\text{-casi todo punto.}$$

Probaremos en primera instancia que la igualdad en (2.18) se cumple para φ acotada. Si $|\varphi| \leq k$, para algún $k \geq 1$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi \right) \psi \right| \leq k |\psi|.$$

Utilizando la desigualdad de Hölder se tiene que $\psi \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y por lo tanto $k|\psi| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi \right) \psi = \left(\int \varphi d\mu \right) \psi.$$

Aplicando teorema de la convergencia dominada se obtiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi \right) \psi d\mu &= \int \left(\int \varphi d\mu \right) \psi d\mu \\ &= \int \varphi d\mu \int \psi d\mu. \end{aligned}$$

Con lo cual se ha probado (3) para φ acotado.

En segunda instancia se probará (2.18), para φ no acotada. Sea $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$ y $k \geq 1$, definimos

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} k & \text{si } \varphi(x) > k \\ \varphi(x) & \text{si } \varphi(x) \in [-k, k] \\ -k & \text{si } \varphi(x) < -k \end{cases}$$

Note que φ_k está acotada, y fijando $\epsilon > 0$ se puede seguir el argumento anterior y obtener que

$$\left| \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi_k \right) \psi d\mu - \int \varphi_k d\mu \int \psi d\mu \right| < \epsilon, \quad (2.21)$$

cuando n es lo suficientemente grande.

Observemos que $\varphi_k \rightarrow \varphi$ para k suficientemente grande. Utilizando la propiedad Arquimediana existe $\bar{k}_x \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(x) \leq \bar{k}_x$, para $x \in M$. Luego

$$|\varphi_k(x) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(x)| = 0,$$

para todo $k > \bar{k}_x$. Por lo tanto $|\varphi_k - \varphi|^p < \epsilon^p$ para cada $p < \infty$ y k suficientemente grande, tenemos que $\int_M |\varphi_k - \varphi|^p d\mu < \epsilon^p$, y por lo tanto $\|\varphi_k - \varphi\|_p \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$.

En el caso de $p = \infty$ se tiene $\varphi_k = \varphi$ para cada $k > \|\varphi\|_\infty$. Utilizando que $\|\varphi_k - \varphi\|_p \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, y la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$\left| \int (\varphi_k - \varphi) d\mu \int \psi d\mu \right| \leq \|\varphi_k - \varphi\|_p \left| \int \psi d\mu \right| < \epsilon, \quad (2.22)$$

para cada k suficientemente grande. Por la proposición 2.3.1 parte (6), la función integrable $(\varphi_k - \varphi)$ es constante, y por lo tanto $\|U_f^j(\varphi_k - \varphi)\|_p = \|\varphi_k - \varphi\|_p$. Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j(\varphi_k - \varphi) \psi d\mu \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int |U_f^j(\varphi_k - \varphi) \psi| d\mu \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|U_f^j(\varphi_k - \varphi)\|_p \|\psi\|_q d\mu \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_k - \varphi\|_p \|\psi\|_q d\mu \\ &= \|\varphi_k - \varphi\|_p \|\psi\|_q \\ &< \epsilon, \end{aligned} \quad (2.23)$$

para n y k suficientemente grande, independiente de n . Si elegimos k de tal manera que (2.22) y (2.23) se cumpla, y n sea suficientemente grande tal que se cumpla (2.21), entonces

$$\begin{aligned} \left| \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi \right) \psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| &= \left| \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi \right) \psi d\mu - \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi_k \right) \psi d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U_f^j \varphi_k \right) \psi d\mu - \int \varphi_k d\mu \int \psi d\mu \right| \\ &\quad + \left| \int \varphi_k d\mu \int \psi d\mu - \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \right| \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$

Con esto hemos demostrado que (1) implica (3), lo que finaliza la prueba.

Ejemplos

1. Sea $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 10x - [10x]$. Sabemos de los ejemplos anteriores que f preserva la medida de Lebesgue.

Proposición 2.3.2 *La transformación f es ergódica relativa a la medida de Lebesgue m .*

Demostración: Es suficiente probar que el conjunto invariante A tiene medida igual a 1. Sea A es un conjunto invariante que tiene medida de Lebesgue positiva. Utilizando el teorema D.0.5, casi todo punto $a \in A$ es un punto de densidad y se cumple que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(B(a, \delta) \cap A)}{m(B(a, \delta))} = 1.$$

En particular,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \left\{ \frac{m(I \cap A)}{M(I)} : I \text{ un intervalo tal que } a \in I \subset B(a, \delta) \right\} = 1.$$

Escogemos un punto denso $a \in A$ que no es de la forma $\frac{n}{10^k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \leq n \leq 10^k$. Esto es posible debido a que el conjunto formado por los puntos $\frac{n}{10^k}$ tiene medida igual a cero.

Afirmamos que el punto a se encuentra en algún intervalo de la forma

$$I(k, n) = \left(\frac{n-1}{10^k}, \frac{n}{10^k} \right), k \in \mathbb{N}, n = 1, \dots, 10^k.$$

En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un único $n = n_k \in \mathbb{N}$ tal que $I(k, n_k)$ contiene al punto a . De no ser así se daría la siguiente contradicción: para cada $k \in \mathbb{N}$ existe n_1 y n_2 en $\mathbb{N}$ tal que $n_1 \neq n_2$, y $a \in I(k, n_1) \cap I(k, n_2)$. Pero $I(k, n_1) \cap I(k, n_2)$ es vacío.

Además, podemos notar que, $m(I(k, n)) = \frac{1}{10^k} \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Si denotamos $I_k = I(k, n_k)$, entonces

$$\frac{m(I_k \cap A)}{m(I_k)} \rightarrow 1 \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Por otro lado, f^k es una biyección afín de I_k al intervalo $(0, 1)$. Luego,

$$\frac{m(f^k(E_1))}{m(f^k(E_2))} = \frac{m(E_1)}{m(E_2)},$$

para cada subconjunto medible E_1, E_2 de I_k . Si $E_1 = I_k \cap A$ y $E_2 = I_k$ entonces

$$\frac{m(f^k(I_k \cap A))}{m((0, 1))} = \frac{m(I_k \cap A)}{m(I_k)},$$

donde $m((0, 1)) = 1$.

Para finalizar, notemos que como A es invariante, $f^k(I_k \cap A)$ está contenido en A . De esta manera

$$m(A) \geq \frac{m(I_k \cap A)}{m(I_k)},$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Como el lado derecho converge a 1 cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $m(A) = 1$. Con lo cual hemos probado que (f, m) es ergódico.

2. Aplicación de Gauss. Sea $G(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, y μ la medida de probabilidad invariante equivalente a la medida de Lebesgue definida por

$$\mu(E) = \frac{1}{\log 2} \int_E \frac{dx}{1+x}. \quad (2.24)$$

Afirmamos que el sistema (G, μ) es ergódico.

En efecto, sea A un conjunto invariante con medida positiva. Lo que queremos probar es que $\mu(A) = 1$.

Notemos en primera instancia que si $G(x) \in (0, 1)$ entonces $x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ para cada $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, donde $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k+1}^+} G(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k}^-} G(x) = 0$. Tenemos que G restringido a cada uno de los intervalos I_k es una función diferenciable y biyectiva sobre $(0, 1)$. Ahora, para casi todo punto $a \in [0, 1]$ existe una sucesión de intervalos I_k que contienen al punto a , y además G^k lleva I_k biyectivamente, y es diferenciable sobre $(0, 1)$. En efecto podemos encontrar este intervalo de la siguiente manera.

Primero, consideremos

$$I(1, m) = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m} \right),$$

para cada $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq 1$. Luego, se define por recurrencia

$$I(k, m_1, m_2, \dots, m_k) = I(1, m_1) \cap G^{-k+1}(I(k-1, m_2, \dots, m_k)),$$

para $m_1, \dots, m_k \geq 1$. Entonces es suficiente tomar como I_k el intervalo $I(k, m_1, \dots, m_k)$ que contiene a a . Esto está bien definido para cada $k \geq 1$, y cada punto a en el complemento de conjuntos contables, es decir, el conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} G^{-k}(\{0, 1\})$. Por otro lado, aunque la restricción de G^k a cada I_k es una biyección diferenciable, esta no es afín.

En la siguiente proposición notar que la constante K es independiente de I_k, E_1, E_2 y sobre todo de k .

Proposición 2.3.3 *Existe $K > 1$ tal que, dado un $k \geq 1$ y un intervalo I_k tal que G^k restringido a I_k es una biyección diferenciable,*

$$\frac{\mu(G^k(E_1))}{\mu(G^k(E_2))} \leq K \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)}$$

para algunos subconjuntos medibles E_1, E_2 del intervalo I_k .

Para probar esta proposición nosotros necesitamos los dos lemas siguientes:

Lema 6 *Para cada $x \in (0, 1]$ se tiene que*

$$|G'(x)| \geq 1, |(G^2)'(x)| \geq 2 \quad \text{y} \quad \left| \frac{G''(x)}{G'(x)^2} \right| \leq 2.$$

Demostración: Recordemos que $G(x) = \frac{1}{x} - m$ sobre cada intervalo $(\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m}]$. Por lo tanto,

$$G'(x) = \frac{-1}{x^2} \quad \text{y} \quad G''(x) = \frac{2}{x^3}$$

La primera identidad implica que $|G'(x)| \geq 1$ para cada $x \in (0, 1]$. Además, $|G'(x)| \geq 2$, cuando $x \leq \frac{2}{3}$. Por lo tanto, $x \geq \frac{2}{3}$ implica que $G(x) = \frac{1}{x} - 1 < \frac{2}{3}$, y consecuentemente $G'(G(x)) \geq 2$. Combinando estas observaciones tenemos que $|(G^2)'(x)| = |G'(x)||G'(G(x))| \geq 2$, para cada $x \in (0, 1]$. Finalmente, $\left| \frac{G''(x)}{G'(x)^2} \right| = 2|x| \leq 2$, para cada $x \in (0, 1]$.

Lema 7 (Distorsión Limitada) Sea I_k un intervalo y supongamos que G^k restringido a I_k es una biyección diferenciable. Entonces existe $C > 1$ tal que

$$\frac{|(G^k)'(x)|}{|(G^k)'(y)|} \leq C$$

para cada x e y en I_k .

Demostración: Sea g la inversa local de G , que es función diferenciable definida sobre algún intervalo, y tal que $G(g(z)) = z$, para cada z en el dominio de definición. Notemos que

$$(\log |G' \circ g(z)|)' = \frac{G''(g(z))g'(z)}{G'(g(z))} = \frac{G''(g(z))}{G'(g(z))^2}.$$

Por lo tanto, de acuerdo a lo visto en el lema anterior, tenemos que

$$|(\log |G' \circ g(z)|)'| \leq 2, \text{ para cada } g \text{ y cada } z. \quad (2.25)$$

Es decir, cada función de la forma $\log |G' \circ g|$ tiene a 2 como constante de Lipschitz.

Al tomar $x, y \in I_k$ entonces

$$\begin{aligned} \log \frac{|(G^k)'(x)|}{|(G^k)'(y)|} &= \log \frac{|(G^k)'(G^{k-1}(x))(G^{(k-1)})'(G^{k-2}(x)) \cdots G'(x)|}{|(G^k)'(G^{k-1}(y))(G^{(k-1)})'(G^{k-2}(y)) \cdots G'(y)|} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \log |G'(G^j(x))| - \log |G'(G^j(y))| \\ &= \sum_{j=1}^k \log |G' \circ g_j(G^j(x))| - \log |G' \circ g_j(G^j(y))|, \end{aligned}$$

donde g_j denota una inversa local de G definida sobre el intervalo $[G^j(x), G^j(y)]$. Usando que cada función de la forma $\log |G' \circ g|$ tiene a 2 como constante de Lipschitz, se tiene

$$\log |G' \circ g_j(G^j(x))| - \log |G' \circ g_j(G^j(y))| \leq 2|G^j(x) - G^j(y)|,$$

y por lo tanto,

$$\log \frac{|(G^k)'(x)|}{|(G^k)'(y)|} \leq 2 \sum_{j=1}^k |G^j(x) - G^j(y)| = 2 \sum_{i=0}^{k-1} |G^{k-i}(x) - G^{k-i}(y)|. \quad (2.26)$$

Del lema anterior tenemos que $|G'(x)| \geq 1$ y $|(G^2)'(x)| \geq 2$. Utilizando teorema del valor medio podemos encontrar respectivamente que, $|G(x) - G(y)| \geq |x - y|$ y $|G^2(x) - G^2(y)| \geq 2|x - y|$. Luego,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{G^2(x) - G^2(y)}{x - y} \right| \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{G^2(x) - G^2(y)}{G(x) - G(y)} \cdot \frac{G(x) - G(y)}{x - y} \right| \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \left| \frac{G^2(x) - G^2(y)}{G(x) - G(y)} \right| \geq 2, \end{aligned}$$

es decir, $|G^2(x) - G^2(y)| \geq 2|G(x) - G(y)|$. De manera inductiva podemos concluir que

$$|G^k(x) - G^k(y)| \geq 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} |G^{k-i}(x) - G^{k-i}(y)|$$

para cada $i = 0, 1, \dots, k$. Reemplazando en (2.26) tenemos que

$$\begin{aligned} \log \frac{|(G^k)'(x)|}{|(G^k)'(y)|} & \leq 2 \sum_{i=0}^{k-1} |G^{k-i}(x) - G^{k-i}(y)| \\ & \leq 2 \sum_{i=0}^{k-1} 2^{-\lfloor \frac{i}{2} \rfloor} |G^k(x) - G^k(y)| \\ & \leq 4 \sum_{i=0}^k \frac{1}{2^i} \\ & \leq 8, \end{aligned}$$

y entonces

$$\frac{|(G^k)'(x)|}{|(G^k)'(y)|} \leq e^8.$$

Así, es suficiente que tomemos $C = e^8$.

Demostración de la proposición 2.3.3: Sea m la medida de Lebesgue sobre $[0, 1]$.

Del lema anterior, se sigue que

$$\frac{m(G^k(E_1))}{m(G^k(E_2))} = \frac{\int_{E_1} |(G^k)'| dm}{\int_{E_2} |(G^k)'| dm} \leq C \frac{m(E_1)}{m(E_2)}.$$

Por otro lado,

$$\frac{1}{2 \log 2} m(E) \leq \mu(E) \leq \frac{1}{\log 2} m(E),$$

para cada conjunto medible $E \subset [0, 1]$. Combinando estas dos relaciones, encontramos que

$$\frac{\mu(G^k(E_1))}{\mu(G^k(E_2))} \leq 2 \frac{m(G^k(E_1))}{m(G^k(E_2))} \leq 2C \frac{m(E_1)}{m(E_2)} \leq 4C \frac{\mu(E_1)}{\mu(E_2)}$$

Por lo tanto, es suficiente tomar $k = 4C$.

Con lo dicho anteriormente estamos listos para concluir que (G, μ) es ergódico. Sea A un conjunto invariante con $\mu(A) > 0$, entonces A también tiene medida de Lebesgue positiva, ya que μ es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue. Con esto casi todo punto $a \in A$ es punto de densidad. Sea a un punto de densidad de A cuya trayectoria futura está contenida en el intervalo abierto $(0, 1)$. Observemos que para cada $x, y \in I_k$ por teorema del valor medio existe cierto $c \in I_k$ tal que

$$x - y = \frac{G^k(x) - G^k(y)}{(G^k)'(c)}.$$

Como $|G^k(x) - G^k(y)| \leq 1$ entonces

$$|x - y| \leq \frac{1}{|(G^k)'(c)|}.$$

Por lo tanto,

$$\text{diam}(I_k) \leq \sup \left\{ \frac{1}{|(G^k)'(x)|} : x \in I_k \right\}.$$

Además, utilizando el lema 7, por inducción tendremos que $(G^k)'(x) \geq 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$, para cada $k \geq 1$. Por lo tanto

$$\text{diam}(I_k) \leq \sup \left\{ \frac{1}{|(G^k)'(x)|} : x \in I_k \right\} \leq 2^{-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor},$$

para cada $k \geq 1$. En particular, el diámetro de I_k converge a cero cuando k tiende a infinito, y como I_k es una vecindad de un punto de densidad a , tenemos que

$$\frac{\mu(I_k \cap A)}{\mu(I_k)} \rightarrow 1 \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Consideremos $E_1 = I_k \cap A^c$ y $E_2 = I_k$ por proposición 2.3.3 se tiene que

$$\frac{\mu(G^k(I_k \cap A^c))}{\mu(G^k(I_k))} \leq K \frac{\mu(I_k \cap A^c)}{\mu(I_k)}.$$

Observemos que $G^k(I_k \cap A^c) = A^c$. En efecto, el conjunto A es invariante, es decir, $A = G^{-1}(A)$, o bien $A = G^{-k}(A)$. Luego, $A^c = (G^{-k}(A))^c = G^{-k}(A^c)$, es decir, A^c es invariante. Por otro lado, $G^k(I_k \cap A^c) = G^k(I_k \cap G^{-k}(A^c)) = G^k(I_k) \cap A^c$, y como $G^k(I_k) = (0, 1)$ obtenemos que $G^k(I_k \cap A^c) = A^c$.

Por lo tanto la desigualdad anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$\mu(A^c) \leq K \frac{\mu(I_k \cap A^c)}{\mu(I_k)}. \quad (2.28)$$

Sabemos que $\frac{\mu(I_k)}{\mu(I_k)} = 1$, y $\mu(I_k \cap (A \cup A^c)) = \mu(I_k \cap A) + \mu(I_k \cap A^c)$, con lo cual

$$\frac{\mu(I_k \cap A^c)}{\mu(I_k)} = 1 - \frac{\mu(I_k \cap A)}{\mu(I_k)}.$$

De acuerdo a (2.27), lo anterior converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Esto muestra que la parte derecha de (2.28) converge a cero cuando $k \rightarrow \infty$, y por lo tanto $\mu(A^c) = 0$, como queríamos probar.

3. El Shift de Bernoulli.

Al considerar (X, C, ν) un espacio de probabilidad, podemos tomar el espacio producto $\Sigma = X^{\mathbb{N}}$, el cual corresponde al conjunto de todas las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in X$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\Sigma = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}; \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in X\}.$$

Sobre este espacio consideraremos el producto de σ -álgebras B , donde $B = C^{\mathbb{N}}$

es la σ -álgebra generada por los cilindros

$$[m; A_m, \dots, A_n] = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}}; x_i \in A_i \text{ para } m \leq i \leq n\}.$$

Como ejemplo ilustrativo, $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ pertenece al cilindro $[3; A_5, A_6, A_7]$ si, y solo si $x_2 \in A_5, x_3 \in A_6, x_4 \in A_7$.

Podemos considerar una medida de probabilidad μ sobre Σ , la cual esta caracterizada por

$$\mu([m; A_m, \dots, A_n]) = \prod_{i=m}^n \nu(A_i) \quad (2.29)$$

La función shift $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es aquella que $\sigma((x_n)_n) = (x_{n+1})_n$, es decir, $\sigma((x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)) = (x_1, \dots, x_n, \dots)$.

Observemos que si

$$\begin{aligned} x = (x_n)_n \in \sigma^{-1}([m; A_m, \dots, A_n]) &\Leftrightarrow \sigma(x) = (x_{n+1})_n \in [m; A_m, \dots, A_n] \\ &\Leftrightarrow (x_n)_n \in [m+1; A_m, \dots, A_n]. \end{aligned}$$

Luego

$$\sigma^{-1}([m; A_m, \dots, A_n]) = [m+1; A_m, \dots, A_n]. \quad (2.30)$$

Es decir, σ es medible respecto a la σ -álgebra $\mathcal{B}$. Además

$$\begin{aligned} \mu(\sigma^{-1}([m; A_m, \dots, A_n])) &= \mu([m+1; A_m, \dots, A_n]) \\ &= \nu(A_m) \nu(A_{m+1}) \cdots \nu(A_n) \\ &= \mu([m; A_m, \dots, A_n]). \end{aligned}$$

Como σ es una función medible, μ medida sobre M , y consideramos la álgebra $\mathcal{A}$ (cuyos elementos son uniones finitas de cilindros) que genera la σ -álgebra $\mathcal{B}$ y $\mu(E) = \mu(\sigma^{-1}(E))$ para cada $E \in \mathcal{A}$. Entonces por lema 1 μ es invariante bajo σ . Hemos probado que la medida μ es invariante bajo el shift. Ahora demostraremos que (σ, μ) es ergódico.

Proposición 2.3.4 *El sistema (σ, μ) es ergódico.*

Demostración: Sea A un conjunto medible invariante. Lo que probaremos es que $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$. Para lo cual utilizaremos el siguiente lema.

Lema 8 Si B y C son uniones finitas de pares de cilindros disjuntos, entonces

$$\mu(B \cap \sigma^{-j}(C)) = \mu(B)\mu(\sigma^{-j}(C)) = \mu(B)\mu(C),$$

para cada j suficientemente grande.

Demostración: Supongamos que B y C son ambos cilindros, donde $B = [k; B_k, \dots, B_l]$ y $C = [m; C_m, \dots, C_n]$. Entonces,

$$\sigma^{-j}(C) = [m+j; C_m, \dots, C_n] \text{ para cada } j.$$

Consideraremos j de tal manera que $m+j > l$. Entonces,

$$\begin{aligned} B \cap \sigma^{-j}(C) &= [k; B_k, \dots, B_l] \cap [m+j; C_m, \dots, C_n] \\ &= \{(x_n)_n : x_k \in B_k, \dots, x_l \in B_l, x_{m+j} \in C_m, \dots, x_{n+j} \in C_n\} \\ &= [k; B_k, \dots, B_l, X, \dots, X, C_m, \dots, C_n] \end{aligned}$$

donde X aparece exactamente $m+j-l-1$ veces. Con lo cual,

$$\mu(B \cap \sigma^{-j}(C)) = \prod_{i=k}^l v(B_i) \cdot 1^{m+1-l-1} \prod_{i=m}^n v(C_i) = \mu(B)\mu(C). \quad (2.31)$$

Ahora supongamos que B y C son uniones finitas de pares de cilindros disjuntos, es decir,

$$B = \bigcup_{i=1}^n B_i, \text{ con } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ para cada } i \neq j$$

y

$$C = \bigcup_{j=1}^m C_j, \text{ con } C_i \cap C_j = \emptyset \text{ para cada } i \neq j.$$

Notemos que

$$\sigma^{-j}(C) = \bigcup_{k=1}^m \sigma^{-j}(C_k)$$

luego

$$\begin{aligned}
 B \cap \sigma^{-j}(C) &= \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^m \sigma^{-j}(C_k) \right) \\
 &= \bigcup_{k=1}^m \left(\left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) \cap \sigma^{-j}(C_k) \right) \\
 &= \bigcup_{k=1}^m \bigcup_{i=1}^n (B_i \cap \sigma^{-j}(C_k)).
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Utilizando (2.31), (2.32) y que μ es finitamente aditiva. Tendremos

$$\begin{aligned}
 \mu(B \cap \sigma^{-j}(C)) &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(B_i \cap \sigma^{-j}(C_k)) \\
 &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \mu(C_k) \\
 &= \mu \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) \mu \left(\bigcup_{k=1}^m C_k \right) \\
 &= \mu(B) \mu(C).
 \end{aligned}$$

Con lo cual finalizamos la demostración del lema.

Siguiendo con la demostración de la proposición. Supongamos que A es invariante y $A \in \mathcal{A}$. Considerando $B = C = A$, en el lema 8, tenemos que $\mu(A \cap \sigma^{-j}(A)) = \mu(A)^2$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Además $\sigma^{-j}(A) = A$, por lo tanto $\mu(A) = \mu(A)^2$, es decir, $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Ahora, consideremos al conjunto A arbitrario e invariante en $\mathcal{B}$. Por teorema de la aproximación (A.2.3) existe $B \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A \Delta B) < \epsilon$, para algún $\epsilon > 0$ dado.

Por lema 8 podemos fijar j tal que

$$\mu(B \cap \sigma^{-j}(B)) = \mu(B) \mu(\sigma^{-j}(B)) = \mu(B)^2. \tag{2.33}$$

Observemos que $\mu(A) = \mu(A - B) + \mu(A \cap B)$ y $\mu(B) = \mu(B - A) + \mu(A \cap B)$, lo que nos lleva a

$$\begin{aligned}
 |\mu(A) - \mu(B)| &\leq |\mu(A - B) - \mu(B - A)| \\
 &\leq \mu(A - B) + \mu(B - A) \\
 &= \mu(A \Delta B).
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Además dados los conjuntos A_1, A_2, B_1, B_2 se tiene que

$$(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2). \quad (2.35)$$

Usando (2.34) se tiene

$$|\mu(A \cap \sigma^{-j}(A)) - \mu(B \cap \sigma^{-j}(B))| \leq \mu((A \cap \sigma^{-j}(A)) \Delta (B \cap \sigma^{-j}(B))).$$

Utilizando (2.35) llegamos a que

$$\begin{aligned} \mu((A \cap \sigma^{-j}(A)) \Delta (B \cap \sigma^{-j}(B))) &\leq \mu(A \Delta B) + \mu(\sigma^{-j}(A) \cap \sigma^{-j}(B)) \\ &= \mu(A \Delta B) + \mu(\sigma^{-j}(A \Delta B)) \end{aligned}$$

y como μ es invariante bajo el shift

$$\mu(\sigma^{-j}(A \Delta B)) = \mu(A \Delta B),$$

concluimos que

$$|\mu(A \cap \sigma^{-j}(A)) - \mu(B \cap \sigma^{-j}(B))| \leq 2\mu(A \Delta B) \leq 2\epsilon. \quad (2.36)$$

Por otra parte tenemos que $|\mu(A) + \mu(B)| \leq 2$, con lo cual $|\mu(A) - \mu(B)|(2 - |\mu(A) + \mu(B)|) \geq 0$. Entonces

$$|\mu(A)^2 - \mu(B)^2| \leq 2|\mu(A) - \mu(B)| \leq 2\epsilon. \quad (2.37)$$

De (2.36) y (2.37) se tiene que

$$\begin{aligned} |\mu(A) - \mu(A)^2| &= |\mu(A) - \mu(B \cap \sigma^{-j}(B)) + \mu(B)^2 - \mu(A)^2| \\ &\leq |\mu(A) - \mu(B \cap \sigma^{-j}(B))| + |\mu(B)^2 - \mu(A)^2| \\ &\leq 4\epsilon. \end{aligned}$$

De la arbitrariedad de ϵ , deducimos que $\mu(A) = \mu(A)^2$ y por lo tanto $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

Capítulo 3

Transformaciones de Möbius

En el siguiente capítulo estudiamos las propiedades principales de las transformaciones de Möbius.

Definición 3.0.1 Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función. La función f es **holomorfa en el punto** $z_0 \in \Omega$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (3.1)$$

existe, donde $h \in \mathbb{C}$ y $h \neq 0$ con $z_0 + h \in \Omega$.

Cuando el límite de (3.1) existe, lo denotaremos por $f'(z_0)$, y lo llamaremos derivada de f en z_0 .

Ejemplo 1: Consideremos la función $f(z) = z$. Tenemos que

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{z_0 + h - z_0}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Por lo tanto $f'(z) = 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 2: Sea la función

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

con dominio $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Así, tenemos que

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\frac{1}{z_0 + h} - \frac{1}{z_0}}{h} = \frac{z_0 - z_0 - h}{h(z_0 + h)z_0} = \frac{-1}{(z_0 + h)z_0}.$$

Por lo tanto, cuando h tiende a cero, obtenemos que, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$.

Ejemplo 3: Al tomar la función $f(z) = \bar{z}$, podemos observar que

$$\frac{f(z_0 + h) + f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0 + h} - \bar{z}_0}{h} = \frac{\bar{h}}{h}.$$

Cuando nos acercamos a cero por el eje real, es decir, si $h \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = 1,$$

y por otro lado si la parte real de h es igual a cero, tenemos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = -1.$$

Luego, el límite no es único. Por lo tanto, f no es holomorfa en z .

Definición 3.0.2 *Un aplicación de la forma $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es llamada **transformación fraccional lineal**. Si además, a, b, c y d satisfacen $ad - bc \neq 0$, entonces $S(z)$ es llamada **Transformación de Möbius**.*

Observaciones:

1. Si S es una transformación de Möbius entonces $S^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ es la inversa de S . Esto se debe a que:

$$\begin{aligned} S(S^{-1}(z)) &= S\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) = \frac{a\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + b}{c\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + d} \\ &= \frac{a(dz-b) + b(-cz+a)}{c(dz-b) + d(-cz+a)} \\ &= \frac{adz - ab - bcz + ab}{cdz - bc - dcz + da} \\ &= \frac{z(ad - bc)}{ad - bc} \\ &= z \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 S^{-1}(S(z)) &= S^{-1}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{d\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) - b}{-c\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + a} \\
 &= \frac{d(az+b) - b(cz+d)}{-c(az+b) + a(cz+d)} \\
 &= \frac{daz + db - bcz - bd}{-acz - bc + acz + ad} \\
 &= \frac{z(ad - bc)}{ad - bc} \\
 &= z
 \end{aligned}$$

2. Si S y T son transformaciones de Möbius entonces $S \circ T$ también lo es.

Veamos la razón de esto. Sean $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, y $T(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$ transformaciones de Möbius, entonces

$$\begin{aligned}
 S(T(z)) &= S\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) = \frac{a\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + b}{c\left(\frac{ez+f}{gz+h}\right) + d} \\
 &= \frac{a(ez+f) + b(gz+h)}{c(ez+f) + d(gz+h)} \\
 &= \frac{(ae+bg)z + af+bh}{(ce+dg)z + cf+dh}.
 \end{aligned}$$

Observe además que,

$$\begin{aligned}
 (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) &= aecf + aedh + bgcf + bgdh \\
 &\quad - (afce + afdg + bhce + bhdg) \\
 &= aecf + aedh + bgcf + bgdh \\
 &\quad - afce - afdg - bhce - bhdg \\
 &= ad(eh - fg) + bc(gf - he) \\
 &= (eh - fg)(ad - bc) \neq 0
 \end{aligned}$$

Esto muestra la afirmación.

3. El conjunto de transformaciones de Möbius forma un grupo bajo la composición de funciones.

4. Podemos considerar la transformación S definida sobre $\mathbb{C}_\infty$ con $S(\infty) = \frac{a}{c}$ y $S\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$.
5. Si $S(z) = z + a$ entonces S es llamada una **traslación**. Si $S(z) = az$ con $a \neq 0$ entonces S es una **dilatación** u **homotecia**. Si $S(z) = e^{i\theta}z$ entonces es una **rotación**. Finalmente si $S(z) = \frac{1}{z}$, entonces es una **inversión**.
6. Una transformación de Möbius distinta de la identidad puede tener a lo más dos puntos fijos.

En efecto, sea S una transformación de Möbius, tal que

$$S(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Luego

$$\begin{aligned} S(z) = z &\Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z \\ &\Leftrightarrow az + b = z(cz + d) \\ &\Leftrightarrow cz^2 + z(d - a) - b = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, S tiene a lo más dos puntos fijos.

7. Una transformación de Möbius queda determinada únicamente por la acción sobre tres puntos dados en $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Sea $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ una transformación de Möbius y a, b, c puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$, de tal manera que $S(a) = \alpha$, $S(b) = \beta$, $S(c) = \gamma$. Supongamos que existe una transformación de Möbius $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ donde $T(a) = \alpha$, $T(b) = \beta$, $T(c) = \gamma$. Luego, por observación 1, existe T^{-1} y por observación 2. tenemos que $T^{-1} \circ S$ es una transformación de Möbius. Por otra parte,

$$T^{-1}(S(a)) = a, \quad T^{-1}(S(b)) = b, \quad T^{-1}(S(c)) = c,$$

Luego, $T^{-1} \circ S$ tiene tres puntos fijos, pero por la observación 6, una transformación de Möbius a lo más tiene dos puntos fijos. Por lo tanto, $T^{-1} \circ S$ es la identidad. Es decir, $S = T$.

Proposición 3.0.1 *Si S es una transformación de Möbius entonces S es la composición de traslaciones, dilataciones, e inversiones.*

Demostración: Sea $S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, Supongamos:

1. si $c = 0$ entonces tenemos que $ad \neq 0$, luego podemos definir $S_1(z) = \frac{a}{d}z$, $S_2(z) = z + \frac{b}{d}$, entonces

$$S_2(S_1(z)) = S_2\left(\frac{a}{d}z\right) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = S(z).$$

2. Si $c \neq 0$ entonces podemos definir $S_1(z) = z + \frac{d}{c}$, $S_2(z) = \frac{1}{z}$, $S_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$, $S_4(z) = z + \frac{a}{c}$. Luego

$$\begin{aligned} S_2(S_1(z)) &= \frac{1}{z + \frac{d}{c}}, \\ S_3\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right) &= \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)}, \\ S_4\left(\frac{bc-ad}{c(cz+d)}\right) &= \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad + a(cz+d)}{c(cz+d)} = \frac{c(az+b)}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1 = S$.

Con lo cual hemos demostrado la proposición.

Notemos ahora que dados z_2, z_3, z_4 puntos en $\mathbb{C}_\infty$ y $S: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ definida por

$$S(z) = \begin{cases} \left(\frac{z-z_3}{z-z_4}\right) : \left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right), & si \quad z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}; \\ S(z) = \frac{z-z_3}{z-z_4}, & si \quad z_2 = \infty; \\ \frac{z_2-z_4}{z-z_4}, & si \quad z_3 = \infty; \\ \frac{z-z_3}{z_2-z_3}, & si \quad z_4 = \infty. \end{cases}$$

En este caso $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = 0$, $S(z_4) = \infty$ y S es la única transformación que tiene esta propiedad (Por observación 7.)

Definición 3.0.3 (Cross ratio) *Se define el cross ratio de z, z_2, z_3 y z_4 como*

$$(z, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z-z_3}{z-z_4}\right) : \left(\frac{z_2-z_3}{z_2-z_4}\right)$$

la cual envía z_2 a 1, z_3 a 0, y z_4 a ∞ .

Se puede observar que,

1. $(z_2, z_2, z_3, z_4) = 1$. En efecto

$$(z_2, z_2, z_3, z_4) = \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) : \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) = 1$$

2. $(z, 1, 0, \infty) = z$. Esto se debe a que para $S(z) = z$, tenemos

$$S(1) = 1, S(0) = 0, S(\infty) = \infty.$$

Como una transformación de Möbius queda determinada únicamente por 3 puntos en $\mathbb{C}_\infty$, entonces $(z, 1, 0, \infty) = z$.

3. Si M es una transformación de Möbius y w_2, w_3, w_4 son puntos tales que $M(w_2) = 1, M(w_3) = 0, M(w_4) = \infty$ entonces por observación 7 se tiene $M(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$.

Proposición 3.0.2 *Si z_2, z_3, z_4 son puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$ y T es una transformación de Möbius entonces*

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$$

Demostración: Sea z_2, z_3, z_4 puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$, se define la transformación de Möbius $S(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$. Si $M = ST^{-1}$ entonces

$$M(T(z_2)) = S(z_2) = 1,$$

$$M(T(z_3)) = S(z_3) = 0,$$

$$M(T(z_4)) = S(z_4) = \infty.$$

Por lo tanto, $M(z) = (z, T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ para todo z en $\mathbb{C}_\infty$. En particular, si $z = T(z_1)$ obtenemos

$$M(T(z_1)) = ST^{-1}(T(z_1)) = S(z_1) = (T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)).$$

Con lo que termina la demostración.

Proposición 3.0.3 *Si z_2, z_3, z_4 son puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$ y w_2, w_3, w_4 también son puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$, entonces existe una única transformación Möbius S tal que $S(z_2) = w_2, S(z_3) = w_3, S(z_4) = w_4$.*

Demostración: Sean z_2, z_3, z_4 son puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$ y w_2, w_3, w_4 son también puntos distintos de $\mathbb{C}_\infty$, y sea $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4), M(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$. Al considerar $S = M^{-1}T$ se obtiene que

$$M^{-1}T(z_2) = M^{-1}(1) = w_2,$$

$$M^{-1}T(z_3) = M^{-1}(0) = w_3,$$

$$M^{-1}T(z_4) = M^{-1}(\infty) = w_4.$$

Luego existe la transformación de Möbius buscada. Para ver que es única supongamos que existe otra transformación de Möbius R que cumple con $R(z_2) = w_2, R(z_3) = w_3, R(z_4) = w_4$, entonces

$$R^{-1}(S(w_2)) = w_2,$$

$$R^{-1}(S(w_3)) = w_3,$$

$$R^{-1}(S(w_4)) = w_4.$$

Hemos mostrado que $R^{-1} \circ S$ tiene tres puntos fijos, pero una transformación de Möbius tiene a lo más dos puntos fijos, entonces $R^{-1} \circ S = I$ y por lo tanto, $R = S$. Con lo cual se finaliza la demostración.

Proposición 3.0.4 *Sean z_1, z_2, z_3, z_4 cuatro puntos distintos en $\mathbb{C}_\infty$. Entonces (z_1, z_2, z_3, z_4) es un número real, si y solamente si, los cuatro puntos se encuentran sobre un círculo de radio finito.*

Demostración: Antes de realizar la demostración veremos 7 observaciones:

1. Un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del ángulo central.

Demostración: Dividiremos la demostración en 3 casos. Se puede utilizar la imagen 3.1 como referencia.

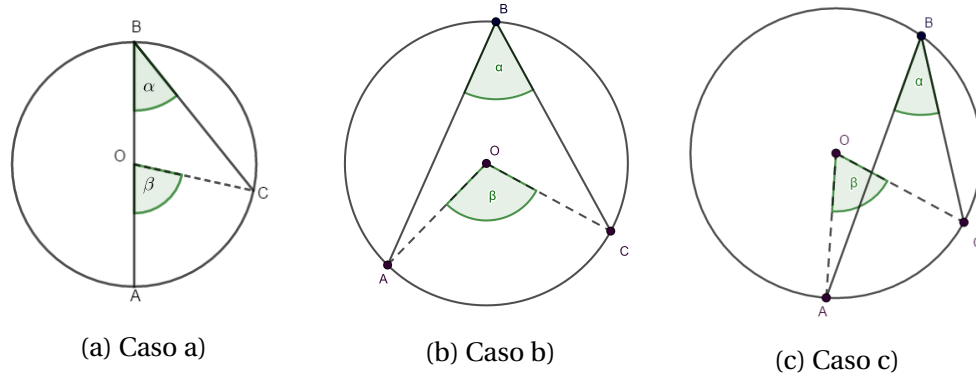


Figura 3.1

Sean S una circunferencia, O el centro de S , y A, B, C puntos distintos sobre la circunferencia, con $\angle ABC = \alpha$, y $\angle AOC = \beta$.

Caso a): Consideraremos que O pertenece al segmento AB . Luego, tenemos que el triángulo OBC es isósceles con base BC . Con lo cual es fácil ver que $\beta = 2\alpha$.

Caso b): El triángulo OAB y OBC son isósceles, con base AB y BC respectivamente. Además, $\beta = 2 \cdot \angle ABO + 2 \cdot \angle OBC = 2(\angle ABO + \angle OBC) = 2\alpha$.

Caso c): Sea D el punto generado por la intersección de la circunferencia S con la semi recta BO . Tenemos que $\angle DOC = 2 \cdot \angle DBC$ (propiedad del caso a)), pero $\angle DBC = \angle DBA + \angle ABC$ y $\angle DOC = \angle DOA + \angle AOC$, con lo cual tenemos que

$$\angle DOC = \angle DOA + \angle AOC = 2\angle DBA + 2\angle ABC.$$

Como $\angle DOA = 2\angle DBA$, podemos concluir que $\angle AOC = 2\angle ABC$.

2. Los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden el mismo arco son iguales.

Demostración: Sean S una circunferencia, O el centro de S , y A, B, C, D puntos sobre la circunferencia. Tenemos que $\angle AOC = 2\angle ABO$, $\angle AOC = 2\angle ADC$. Por lo tanto, $\angle ABO = \angle ADC$.

3. Sean S un círculo, y A, B, C, D, E, O serán puntos que cumplen con:

- $A, B, C, D \in S$,
- O el centro del círculo.

- $E = \overline{AC} \cap \overline{BD}$ y E se encuentra en el interior de S .

Entonces se tiene que:

$$\angle DEA = \frac{\angle DOA + \angle BOC}{2}$$

Demostración: Al considerar la figura 3.2, observemos que:

- $\angle DEA = \angle EBA + \angle BAE$
- $\angle DBA = \angle EBA$ y $\angle BAC = \angle BAE$
- $\angle DBA = \frac{\angle DOA}{2}$ y $\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}$

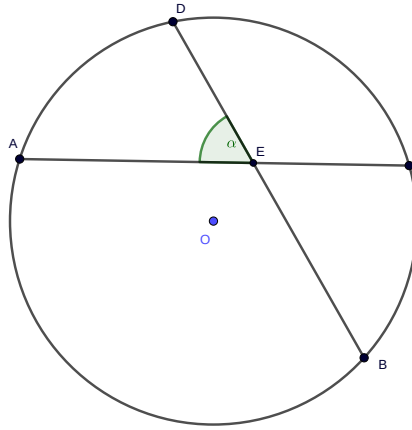


Figura 3.2

Luego,

$$\begin{aligned} \angle DEA &= \angle EBA + \angle BAE \\ &= \angle DBA + \angle BAC \\ &= \frac{\angle DOA + \angle BOC}{2}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

4. De la observación anterior tenemos que:

$$\angle DBA < \angle DEA$$

5. Sean S un círculo, A, B, C, D, E, O puntos que cumplen:

- A, B, C y D pertenecen al círculo.
- O el centro del círculo.
- $E = \overline{AB} \cap \overline{CD}$ y E se encuentra en el exterior de S .

Entonces se tiene que:

$$\angle DEA = \frac{\angle DOA - \angle BOC}{2}.$$

Demostración: La siguiente imagen representa las condiciones anteriores.

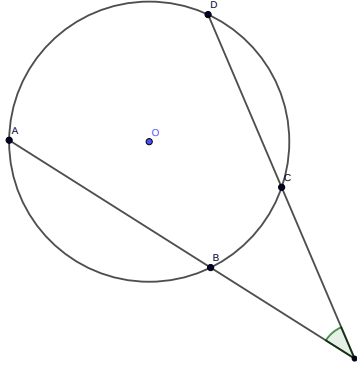


Figura 3.3

De la figura 3.3 tenemos que:

- En el el triángulo $\triangle EBD$: $\angle EBD + \angle BDE + \angle DEB = \pi$.
- $\angle EBD = \pi - \angle DBA$.
- $\angle DBA = \frac{\angle DOA}{2}$ y $\angle BDC = \frac{\angle BOC}{2}$.

Luego,

$$\begin{aligned} \angle EBD + \angle BDE + \angle DEB &= \pi \\ \pi - \angle DBA + \angle BDE + \angle DEB &= \pi \\ \angle DEB &= \angle DBA - \angle BDE \\ \angle DEB &= \frac{\angle DOA - \angle BOC}{2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

6. De la observación anterior tenemos que:

$$\angle DEA \leq \angle DOA.$$

7.

$$\begin{aligned} \arg(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \arg\left(\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}\right) : \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}\right)\right) \\ &= \arg\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}. \end{aligned}$$

Lo que sigue es la demostración de la proposición 3.0.4, donde S es una circunferencia de centro O .

($\Leftarrow$) Si $z_1, z_2, z_3, z_4 \in S$ tenemos que:

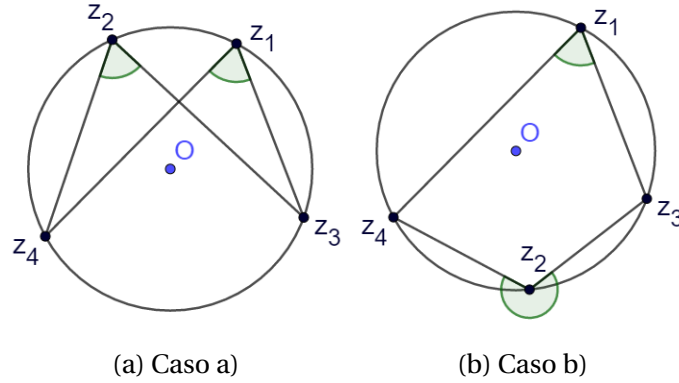


Figura 3.4

Para el caso a) utilizamos la propiedad de la observación 2, y entonces

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Para el caso b) tenemos que

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = \arg\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = k\pi, k \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, del caso a) y b) se puede concluir que $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\arg(z_1, z_2, z_3, z_4) = n\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Si z_1 no pertenece a la circunferencia que pasa por los puntos z_2, z_3, z_4 entonces se pueden dar los siguientes casos:

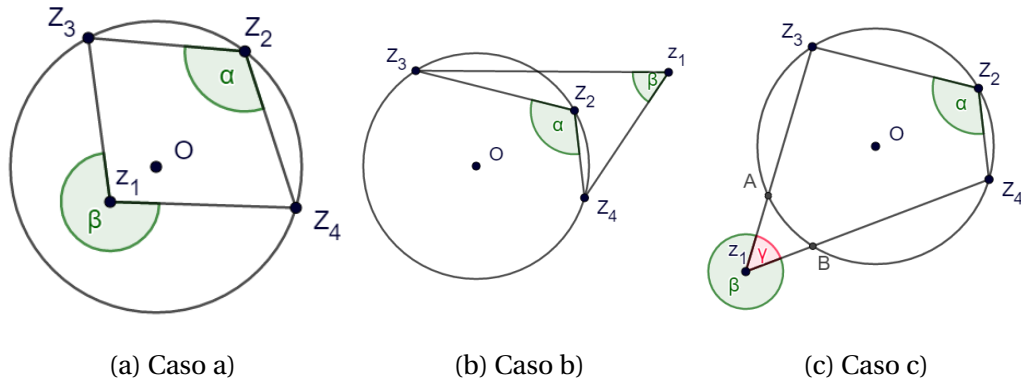


Figura 3.5

- Para el caso a) tenemos por la observación 4. que $\beta > \alpha$, además es claro que $0 < \alpha < \pi$ y $0 < \beta < 2\pi$. Con lo cual, $0 < \beta - \alpha < \pi$. Considerando

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

$$\arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \alpha + 2n\pi, \text{ con } 0 < \alpha < \pi, n \in \mathbb{Z}.$$

Obtenemos que

$$2m\pi < \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} < (2m + 1)\pi, m \in \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, $(z_1, z_2, z_3, z_4) \notin \mathbb{R}$

- Para el caso b) de acuerdo a la observación 6. tenemos que $\alpha > \beta$, y $0 < \beta < \alpha < \pi$,

entonces $0 < \alpha - \beta < \pi$. Consideramos

$$\begin{aligned} \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} &= \beta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} &= \alpha + 2n\pi, \quad \text{con } 0 < \alpha < \pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Con lo cual,

$$2m\pi > \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} > (2m - 1)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $(z_1, z_2, z_3, z_4) \notin \mathbb{R}$

- Para el caso c) $\pi < \beta < 2\pi$, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \frac{\angle AOB}{2} < \pi$ y $\gamma = \pi - \alpha - \frac{\angle AOB}{2}$. Además, $\beta = 2\pi - \gamma = \pi + \alpha + \frac{\angle AOB}{2}$ entonces

$$\beta - \alpha = \pi + \frac{\angle AOB}{2}$$

Con lo cual

$$\pi < \beta - \alpha < 2\pi.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} &= \beta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} &= \alpha + 2n\pi, \quad \text{con } 0 < \alpha < \pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Luego,

$$(2m + 1)\pi < \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} < (2m + 2)\pi, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Concluimos que $(z_1, z_2, z_3, z_4) \notin \mathbb{R}$

Por lo tanto, z_1 pertenece a la circunferencia que pasa por puntos z_2, z_3, z_4 .

Teorema 3.0.1 *Una transformación de Möbius lleva círculos en círculos.*

Demostración: Sea Γ un círculo en $\mathbb{C}_\infty$, S una transformación de Möbius, y z_2, z_3, z_4 tres puntos distintos sobre Γ y $w_j = S(z_j)$ para $j = 2, 3, 4$. Luego, como S es la compo-

sición de traslaciones, dilataciones e inversiones tenemos que w_2, w_3, w_4 determinan un círculo Γ' .

Afirmamos que $S(\Gamma) = \Gamma'$. En efecto, tomemos algún z en $\mathbb{C}_\infty$. Por la proposición 3.0.2, para z_2, z_3, z_4 puntos distintos y S transformación de Möbius tenemos

$$\begin{aligned} (z, z_2, z_3, z_4) &= (S(z), S(z_2), S(z_3), S(z_4)) \\ &= (S(z), w_2, w_3, w_4). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Así, por la proposición 3.0.4, si $z \in \Gamma$ entonces $(S(z), S(z_2), S(z_3), S(z_4))$ es un número real, lo que implica que $S(z) \in \Gamma'$.

Proposición 3.0.5 *Para dos círculos Γ y Γ' en $\mathbb{C}_\infty$ existe una transformación de Möbius tal que $T(\Gamma) = \Gamma'$.*

Demostración: Sea Γ y Γ' dos círculos en $\mathbb{C}_\infty$, $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ y $w_2, w_3, w_4 \in \Gamma'$. Tomando $R(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, $S(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$. Entonces $T = S^{-1} \circ R$ lleva Γ en Γ' . En efecto,

$$T(z_2) = S^{-1}(R(z_2)) = S^{-1}(1) = w_2,$$

$$T(z_3) = S^{-1}(R(z_3)) = S^{-1}(0) = w_3,$$

$$T(z_4) = S^{-1}(R(z_4)) = S^{-1}(\infty) = w_4.$$

Utilizando el hecho que por tres puntos pasa una única circunferencia, y la proposición 3.0.1, tenemos que $T(\Gamma) = \Gamma'$.

Proposición 3.0.6 *Para cualquier par de círculos Γ y Γ' en $\mathbb{C}_\infty$ existe una transformación de Möbius T tal que $T(\Gamma) = \Gamma'$. Además, podemos especificar que puntos envía T sobre Γ y cual es su correspondiente imagen en Γ' . Si especificamos $T(z_j)$ para $j = 2, 3, 4$ (distintos z_j en Γ) entonces T es única.*

Demostración: Sean Γ, Γ' dos círculos en $\mathbb{C}_\infty$, $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ distintos y $w_2, w_3, w_4 \in \Gamma'$ distintos. Tomamos $R(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ y $S(z) = (z, w_2, w_3, w_4)$. Entonces definimos $T = S^{-1} \circ R$, donde $T(z_j) = w_j$ para $j = 2, 3, 4$.

Afirmamos que $T(\Gamma) = \Gamma'$. En efecto, tomemos algún z en $\mathbb{C}_\infty$, por proposición 3.0.2, para z_2, z_3, z_4 distintos y T transformación de Möbius se tiene

$$\begin{aligned} (z, z_2, z_3, z_4) &= (T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) \\ &= (T(z), w_2, w_3, w_4). \end{aligned}$$

Por proposición 3.0.4, si $z \in \Gamma$ entonces $(T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))$ es un número real. Es decir, $T(z) \in \Gamma'$. Con lo cual $T(\Gamma) = \Gamma'$.

Veamos que T es único. Supongamos que existe T' transformación de Möbius, tal que $T'(z_j) = w_j$ para $j = 2, 3, 4$. Entonces tenemos que

$$S(w_j) = T'(T^{-1}(w_j)) = w_j, \text{ para } j = 2, 3, 4.$$

Luego, la transformada de Möbius tiene tres puntos fijos, lo cual no puede ocurrir. Luego $T' \circ T^{-1} = I$. Por lo tanto, $T' = T$.

Con lo anterior hemos visto que una transformación de Möbius manda círculos en círculos. Pero nos podemos preguntar: ¿qué sucede en el interior y en el exterior de esos círculos? Para lo cual se definen los siguientes conceptos.

Definición 3.0.4 Sea Γ un círculo que pasa por los puntos z_2, z_3, z_4 . Los puntos z, z^* en $\mathbb{C}_\infty$ son llamados **simétricos** respecto a Γ si

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)}. \quad (3.5)$$

Observaciones:

1. La simetría es independiente de los puntos escogidos. Es decir, dados $z_2, z_3, z_4 \in \Gamma$ y otros puntos $w_2, w_3, w_4 \in \Gamma$ entonces

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \text{ si, y solo si, } (z^*, w_2, w_3, w_4) = \overline{(z, w_2, w_3, w_4)}$$

con $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$.

Proposición 3.0.7 ((Principio de Simetría)) Si una transformación de Möbius T lleva un círculo Γ_1 al círculo Γ_2 entonces un par de puntos simétricos con respecto a Γ_1 son llevados por T sobre dos puntos simétricos respecto a Γ_2 .

Demostración: Sean $z_3, z_3, z_4 \in \Gamma_1$ y sean $z, z^* \in \mathbb{C}_\infty$. Si z, z^* son puntos simétricos con

respecto a Γ_1 entonces

$$\begin{aligned} (T(z^*), T(z_2), T(z_3), T(z_4)) &= (z^*, z_2, z_3, z_4) \\ &= \overline{(z, z_2, z_3, z_4)} \\ &= \overline{(T(z), T(z_2), T(z_3), T(z_4))} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(z^*)$ y $T(z)$ son simétricos con respecto a Γ_2 .

Definición 3.0.5 Si Γ es un círculo entonces una **orientación** para Γ es una tripleta ordenada de puntos (z_1, z_2, z_3) tal que cada z_1, z_2, z_3 están en Γ .

Definición 3.0.6 Si (z_1, z_2, z_3) es una orientación de Γ entonces se define el lado derecho de Γ (con respecto a (z_1, z_2, z_3)) como

$$\{z : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}.$$

Similarmente, se define el lado izquierdo de Γ como

$$\{z : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}.$$

Observación:

1. Si $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ podemos mostrar que

$$T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty \quad \text{si y solamente si, podemos escoger } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Si $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$, existen $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ tales que $T(x_2) = 1$, $T(x_3) = 0$, $T(x_4) = \infty$, con lo cual

$$\begin{aligned} T(z) &= \left(\frac{z - x_3}{z - x_4} \right) : \left(\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} \right) \\ &= \frac{(x_2 - x_4)z - x_3(x_2 - x_4)}{(x_2 - x_3)z - x_4(x_2 - x_3)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos escoger $a = x_2 - x_4$, $b = -x_3(x_2 - x_4)$, $c = x_2 - x_3$, $d = -x_4(x_2 - x_3)$.

($\Leftarrow$) Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$T(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R}_\infty,$$

para todo $x \in \mathbb{R}_\infty$.

2. Si $\Gamma = \mathbb{R}$ y $z_1, z_2, z_4 \in \mathbb{R}$, entonces existen a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ tales que $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $T(\mathbb{R}_\infty) = \mathbb{R}_\infty$.
Por la observación anterior podemos escoger a, b, c, d como números reales. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{az+b}{|cz+d|^2} \cdot (c\bar{z}+d) \\ &= \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} Im(z, z_1, z_2, z_3) &= Im\left(\frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}\right) \\ &= Im\left(\frac{adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} Imz. \end{aligned}$$

Así, $\{z : Im(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$ es el semi plano superior o inferior dependiendo de si $(ad-bc) > 0$ o $(ad-bc) < 0$.

3. Sea Γ círculo arbitrario, y supongamos que $z_1, z_2, z_3 \in \Gamma$. Para alguna transformación de Möbius S tenemos que

$$\begin{aligned} \{z : Im(z, z_1, z_2, z_3) > 0\} &= \{z : Im(S(z), S(z_1), S(z_2), S(z_3)) > 0\} \\ &= S^{-1}\{z : Im(z, S(z_1), S(z_2), S(z_3)) > 0\} \end{aligned}$$

En particular, si S lleva Γ en $\mathbb{R}_\infty$, entonces $\{z : Im(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$ es igual a considerar S^{-1} del semi plano superior o inferior.

Principio de orientación: Sea Γ_1 y Γ_2 dos círculos en $\mathbb{C}_\infty$ y sea T una transformación de Möbius tal que $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$. Sea (z_1, z_2, z_3) la orientación de Γ_1 , entonces T envía el lado derecho y el lado izquierdo de Γ_1 en el lado derecho e izquierdo de Γ_2 , con respecto a la orientación $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

Demostración: Sea Γ_1 y Γ_2 dos círculos en $\mathbb{C}_\infty$, T una transformación de Möbius tal que $T(\Gamma_1) = \Gamma_2$ y (z_1, z_2, z_3) la orientación de Γ_1 . Entonces

$$\{z : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\} = \{z : \text{Im}(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) > 0\}.$$

Del mismo modo,

$$\{z : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\} = \{z : \text{Im}(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) < 0\}.$$

Capítulo 4

Problema de Dirichlet

En este capítulo veremos que las soluciones del problema de Dirichlet quedan determinadas por la integral de Poisson.

4.1. Funciones Armónicas

Definición 4.1.1 Si G es un conjunto abierto de $\mathbb{C}$ entonces $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica si u tiene segundas derivadas parciales continuas y cumple con

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Esta ecuación es llamada ecuación de Laplace.

Observaciones:

- (1) Una función f sobre una región analítica G es analítica si y solo si $Re f = u$ y $Im f = v$ son funciones armónicas que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- (2) Una región G es simplemente conexa si para cada función armónica u sobre G existe una función armónica v sobre G tal que $f = u + i v$ es analítica sobre G

Definición 4.1.2 Si $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, entonces $u = Re f$ y $v = Im f$ son llamados conjugados armónicos.

Notemos que:

- De (2) y la definición 4.1.2 podemos observar que para cada función armónica sobre una región simplemente conexa habrá un conjugado armónico.
- Si u es una función armónica sobre G y D es un disco que está contenido en G , entonces existe una función armónica v sobre D tal que $u + iv$ es analítica sobre D . En otras palabras, cada función armónica tiene un conjugado armónico local.
- Finalmente notemos que si v_1 y v_2 son ambos conjugados armónicos de u entonces $i(v_1 - v_2) = (u + iv_1) - (u + iv_2)$ es una función analítica cuyo rango está contenido en el eje imaginario; por lo tanto $v_1 = v_2 + c$, para alguna constante c .

Proposición 4.1.1 *Si $u : G \rightarrow \mathbb{C}$ es armónica entonces u es infinitamente diferenciable.*

Demostración: Sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Como G es abierto podemos escoger $\delta > 0$ de tal forma que $B(z_0; \delta) \subset G$. Como $B(z_0; \delta)$ es simplemente conexo entonces u tiene un conjugado armónico v sobre $B(z_0; \delta)$, lo cual nos permite obtener una función analítica $u + iv$ que es infinitamente diferenciable sobre $B(z_0; \delta)$. Por lo tanto u es infinitamente diferenciable.

La siguiente proposición muestra una propiedad que las funciones armónicas comparten con las funciones analíticas. El siguiente resultado es análogo de la conocida fórmula integral de Cauchy.

Teorema 4.1.1 (Propiedad de la Media) : *Sea $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función armónica y sea $\bar{B}(a, r)$ un disco cerrado contenido en G . Si γ es el círculo $|z - a| = r$ entonces*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demostración: Escogemos un disco abierto D de tal manera que $\bar{B}(a; r) \subset D \subset G$. Como u es función armónica sobre G y D es simplemente conexo tenemos que u posee conjugado armónico v sobre D , lo que nos permite obtener una función $f = u + iv$ analítica sobre D . Observemos que $u = \operatorname{Re} f$. Luego por Fórmula Integral de Cauchy,

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z - a} dz.$$

Realizando el cambio de variable $z = a + re^{i\theta}$ obtenemos

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Tomando la parte real de lo anterior obtenemos lo que buscamos.

Definición 4.1.3 Una función continua $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ tiene la propiedad del valor medio (PVM) si siempre tenemos que $\overline{B}(a; r) \subset G$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Principio del máximo (primera versión). Sea G una región y suponga que u es una función continua real valuada sobre G , con la propiedad del valor medio. Si existe un punto a en G tal que $u(a) \geq u(z)$ para todo z en G , entonces u es una función constante.

Demostración: Sea el conjunto A definido por

$$A = \{z \in G : u(z) = u(a)\}.$$

Como u es continua y $\{u(a)\}$ es cerrado, tenemos que $u^{-1}(u(\{a\}))$ es un conjunto cerrado. Luego, A es cerrado en G . Si $z_0 \in A$, tomemos r elegido de tal manera que $\overline{B}(z_0; r) \subset G$. Suponiendo que existe un punto b en $\overline{B}(z_0; r)$ tal que $u(b) \neq u(a)$, entonces $u(b) < u(a)$. Por continuidad, $u(z) < u(a) = u(z_0)$, para todo z en una vecindad de b . En particular, si $\rho = |z_0 - b|$ y $b = z_0 + \rho e^{i\beta}$ con $0 \leq \beta < 2\pi$, entonces hay un intervalo propio I de $[0, 2\pi]$ tal que $\beta \in I$ y $u(z_0 + \rho e^{i\theta}) < u(z_0)$, para todo θ en I . Por lo tanto, por PVM

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta < u(z_0),$$

lo cual es una contradicción. Así $B(z_0; r) \subset A$ y A también es abierto. Por la conexidad de G , $A = G$.

Principio del Máximo (segunda versión). Sea G una región y sea u y v dos funciones real valuadas continuas sobre G que tienen la PVM. Si para cada punto a el borde ex-

tendido $\partial_\infty G$,

$$\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq \liminf_{z \rightarrow a} v(z)$$

entonces también $u(z) < v(z)$ para todo z en G o $u = v$.

Para una demostración de este resultado, ver [3].

4.2. Funciones Armónicas sobre el Disco

El plan de esta sección es estudiar el problema de Dirichlet para funciones armónicas sobre el disco unitario abierto. De importancia fundamental es el Kernel de Poisson.

Definición 4.2.1 *La función*

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta},$$

para $0 \leq r < 1$ y $-\infty < \theta < \infty$, es llamado el Kernel de Poisson.

Podemos observar que:

$$\blacksquare \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) = P_r(\theta).$$

Esto se debe a lo siguiente. Sea $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < 1$; entonces

$$\begin{aligned} \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} &= (1 + z)(1 + z + z^2 + \dots) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta \\
 &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=-1}^{-\infty} r^{-n} e^{in\theta} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \\
 &= P_r(\theta).
 \end{aligned}$$

■ $P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$
En efecto,

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} &= \frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \cdot \frac{1 - re^{-i\theta}}{1 - re^{-i\theta}} \\
 &= \frac{1 - re^{-i\theta} + re^{i\theta} - r^2}{1 - re^{-i\theta} - re^{i\theta} + r^2} \\
 &= \frac{1 - r(\cos \theta - i \sin \theta) + r(\cos \theta + i \sin \theta) - r^2}{1 - r(\cos \theta - i \sin \theta) - r(\cos \theta + i \sin \theta) + r^2} \\
 &= \frac{1 - r^2 + 2i \sin \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}.$$

Proposición 4.2.1 *El Kernel de Poisson satisface lo siguiente:*

1. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$;
2. $P_r(\theta) > 0$ para todo θ , $P_r(-\theta) = P_r(\theta)$, y P_r es periódica en θ con periodo 2π ;
3. $P_r(\theta) < P_r(\delta)$ si $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$;
4. Para cada $\delta > 0$, $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente en θ para $\pi \geq |\theta| \geq \delta$

Demostración:

1. Para un valor fijo de r , $0 \leq r < 1$, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$ converge uniformemente en θ , esto se debe a

$$|r^n e^{-in\theta}| = |r^n e^{in\theta}| \leq |r|^n.$$

Luego la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |r|^n$ converge para $0 \leq r < 1$ y por el test M de Weierstrass $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{-in\theta}$ convergen uniformemente para valores de $0 \leq r < 1$. Además al fijar r , $r^n e^{in\theta}$ es continuo para todo n , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta \\ &= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^{|n|} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\theta \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. De la igualdad antes calculada, $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2}$ y considerando $0 \leq r < 1$ tenemos que $P_r(\theta) > 0$. Como $\cos\theta$ es par y tiene periodo 2π entonces $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$ y $P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta+2k\pi)+r^2} = P_r(\theta+2k\pi)$.
3. Sea $0 < \delta < \theta \leq \pi$ y definimos la función $f: [\delta, \theta] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = P_r(t)$. Tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} \right) = \frac{-2r\sin t(1-r^2)}{(1-2r\cos t+r^2)^2} < 0, \text{ con } \theta < \pi.$$

Luego, $\frac{df(t)}{dt} < 0$, lo que indica que la función decrece, y por lo tanto $P_r(\delta) > P_r(\theta)$ para $0 < \delta < \theta < \pi$. En el caso que $\theta = \pi$ tenemos que $P_r(0) = 0$. Con lo cual concluimos que $P_r(\delta) > P_r(\theta)$ para $0 < \delta < \theta \leq \pi$.

4. Sea $\delta > 0$, escogemos θ de tal manera que $\delta \leq |\theta| \leq \pi$. Por 3 tenemos que bajo estas hipótesis, $P_r(\theta)$ es decreciente, es decir, $P_r(\delta) > P_r(\theta)$. Además,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\delta) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \delta + r^2} = \frac{1 - 1}{1 - 2 \cos \delta + 1} = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0$ para cada θ que cumple $\delta \leq |\theta| \leq \pi$.

Teorema 4.2.1 (Problema de Dirichlet) Sea $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe una función continua $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. $u(z) = f(z)$ para z en $\partial\mathbb{D}$
2. u es armónica en $\mathbb{D}$

Además u es única y está definida por la fórmula

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \quad (4.1)$$

para $0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Demostración:

Definimos $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u(re^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ f(e^{i\theta}) & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

Veamos que:

- a) u es armónica en $\mathbb{D}$, y por ende continua en $\mathbb{D}$.

Si $0 \leq r < 1$ entonces

$$\begin{aligned} u(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} \right) f(e^{it}) dt \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(\frac{1 + re^{i(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} \right) dt \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(\frac{e^{it} + re^{i\theta}}{e^{it} - re^{i\theta}} \right) dt \right\}. \end{aligned}$$

Definimos $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \left(\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right) dt.$$

Notemos que g es analítica y como $u = \operatorname{Re}(g)$, entonces u es armónica en $\mathbb{D}$.

b) u es continua en $\overline{\mathbb{D}}$.

En primera instancia, de la parte a) tenemos que u es continua sobre $\mathbb{D}$.

En segunda instancia, como f es continua entonces u es continua sobre el borde de $\mathbb{D}$.

Para finalizar Demostremos que dado α en $[-\pi, \pi]$ y $\epsilon > 0$ existe ρ , $0 < \rho < 1$, y un arco A de ∂D sobre $e^{i\alpha}$ tal que para $\rho < r < 1$ y $e^{i\theta} \in A$,

$$|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \epsilon.$$

Como f es una función continua entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|e^{i\theta} - e^{i\alpha}| < \delta \Rightarrow |f(e^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| < \epsilon_1.$$

Por proposición 4.2.1 parte 4, tenemos que para cada $\frac{\delta}{2} > 0$, $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente en θ para $\pi \geq |\theta| \geq \frac{\delta}{2}$. Es decir, existe un número ρ , $0 < \rho < 1$, tal que

$$P_r(\theta) < \frac{\epsilon}{3M}$$

para $\rho < r < 1$ y $|\theta| \geq \frac{1}{2}\delta$. Sea A el arco $\{e^{i\theta} : |\theta - \alpha| < \frac{1}{2}\delta\}$. Si $e^{i\theta} \in A$ y $\rho < r < 1$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta}) - f(e^{i\alpha})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt - f(e^{i\alpha}) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\psi) f(e^{i\alpha}) d\psi \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} P_r(\theta - t) f(e^{i\alpha}) (-dt) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(e^{i\alpha}) dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) (f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})) dt \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| < \delta} P_r(\theta - t) (f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})) dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| \geq \delta} P_r(\theta - t) [f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})] dt \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| < \delta} P_r(\theta - t) |f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})| dt \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| \geq \delta} P_r(\theta - t) |f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})| dt.
\end{aligned}$$

Por continuidad de f tenemos que si $|t - \alpha| < \delta$ entonces $|f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})| < \frac{\epsilon}{3}$, además $P_r(\theta - t) > 0$ para todo $\theta - t$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| < \delta} P_r(\theta - t) |f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})| dt < \frac{\epsilon}{3}.$$

Si $|t - \alpha| \geq \delta$ y $|\theta - \alpha| \leq \frac{\delta}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}
|\theta - t| &= |\theta - \alpha + \alpha - t| \\
&\geq |\alpha - t| - |\theta - \alpha| \\
&\geq \delta - \frac{\delta}{2} \\
&\geq \frac{\delta}{2}.
\end{aligned}$$

Con lo cual $P_r(\theta - t) < \frac{\epsilon}{3M}$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| \geq \delta} P_r(\theta - t) \left| (f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})) \right| dt &< \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| \geq \delta} \frac{\epsilon}{3M} \cdot 2M dt \\ &< \frac{2\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| < \delta} P_r(\theta - t) \left| (f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})) \right| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{|t-\alpha| \geq \delta} P_r(\theta - t) \left| (f(e^{it}) - f(e^{i\alpha})) \right| dt < \epsilon.$$

- c) Mostremos que u es única. Supongamos que existe v función continua sobre $\bar{\mathbb{D}}$ la cual es armónica sobre $\mathbb{D}$ y $v(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$, para todo θ . Entonces $u - v$ es armónica sobre $\mathbb{D}$ y además $(u - v)(z) = f(z) - f(z) = 0$ para todo $z \in \partial D$. Como u, v son funciones armónicas, cumplen con la propiedad de la media, además

$$\limsup_{z \rightarrow a} u(z) = \limsup_{z \rightarrow a} v(z)$$

Por el principio del máximo, tenemos que $u(z) < v(z)$ o $u = v$ para todo $z \in G$ y $u(z) > v(z)$ o $u = v$ para todo $z \in G$, por lo tanto $u = v$ para todo $z \in G$.

Corolario 4.2.2 Si $u : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que es armónica en $\mathbb{D}$ entonces

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt$$

para $0 \leq r < 1$ y todo θ . Además, u es la parte real de la función analítica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt.$$

Demostración: Por teorema 4.2.1, u es única y es de la forma

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt$$

para $0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Además

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(f(z)) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} u(e^{it}) dt \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + re^{(\theta-t)i}}{1 - re^{(\theta-t)i}} u(e^{it}) dt \right), \text{ con } z = re^{i\theta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{(\theta-t)i}}{1 - re^{(\theta-t)i}} \right) u(e^{it}) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) u(e^{it}) dt.
 \end{aligned}$$

Corolario 4.2.3 Sea $a \in \mathbb{C}$, $\rho > 0$, y suponga que h es una función real sobre $\{z : |z - a| = \rho\}$; entonces existe una única función $w : \overline{B}(a; \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que w es armónica sobre $B(a; \rho)$ y $w(z) = h(z)$ para $|z - a| = \rho$.

Demostración: Consideremos $f(e^{i\theta}) = h(a + \rho e^{i\theta})$; entonces f es continua sobre $\partial\mathbb{D}$. Por teorema anterior existe $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que u es armónica en $\mathbb{D}$ y $u(e^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$. Es decir, para $|z - a| = \rho$ tenemos

$$\begin{aligned}
 u(e^{i\theta}) &= f(e^{i\theta}) \\
 &= h(a + \rho e^{i\theta}) \\
 &= w(a + \rho e^{i\theta}).
 \end{aligned}$$

Considerando $z = a + \rho e^{i\theta}$ tenemos que $e^{i\theta} = \frac{z-a}{\rho}$. Con lo cual podemos definir

$$w(z) = u\left(\frac{z-a}{\rho}\right),$$

que cumple con lo pedido.

Capítulo 5

La dinámica de Funciones Inner

En este capítulo consideraremos $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ en el plano complejo, $\partial\mathbb{D}$ su frontera y λ la medida de probabilidad de Lebesgue sobre la σ -álgebra de Borel de $\partial\mathbb{D}$. $L^1(\lambda)$ es el conjunto de todas las funciones medibles φ sobre $\partial\mathbb{D}$, tal que $\int_{\partial\mathbb{D}} |\varphi| d\lambda < \infty$. $L^\infty(\lambda)$ consiste de todas las funciones medibles φ sobre $\partial\mathbb{D}$ para la cual $\|\varphi\|_\infty < \infty$, donde $\|\varphi\|_\infty$ es el supremo esencial de φ .

5.1. Funciones Inner

En esta sección estudiaremos algunos ejemplos de funciones inner.

Definición 5.1.1 Una **función inner** es una función holomorfa $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f^*(w) \in \partial\mathbb{D}$, λ -casi todo $w \in \partial\mathbb{D}$, donde $f^*(w) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f(rw)$. Esta aplicación $f^* : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ es llamada la **función borde** de f .

Cuando no haya confusión, llamaremos indistintamente a f^* como f .

Ejemplos:

1. Producto de Blaschke finito.

Sea

$$B_n(z) = \alpha \prod_{n=0}^N \frac{z - a_n}{1 - \overline{a_n}z},$$

con $\alpha \in \partial\mathbb{D}$ y $a_n \in \mathbb{D}$ para $0 \leq n \leq N$. Veamos que $|B_n(e^{i\theta})| = 1$

$$\begin{aligned} \left| \alpha \prod_{n=0}^N \frac{e^{i\theta} - a_n}{1 - \overline{a_n} e^{i\theta}} \right| &= |\alpha| \prod_{n=0}^N \left| \frac{e^{i\theta} - a_n}{1 - \overline{a_n} e^{i\theta}} \right| \\ &= \prod_{n=0}^N \frac{|e^{i\theta} - a_n|}{|1 - \overline{a_n} e^{-i\theta}|} \\ &= \prod_{n=0}^N \frac{|1 - a_n e^{-i\theta}|}{|1 - \overline{a_n} e^{-i\theta}|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Con lo cual hemos demostrado que f es una función inner.

2. Producto de Blaschke infinito.

Sea

$$\tilde{B}(z) = z^m \prod_{a_n \neq 0} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z} \quad (5.1)$$

donde a_n es una sucesión en $\mathbb{D}$ tal que $\sum_{n \geq 0} (1 - |a_n|) < \infty$.

Veamos primero que $\tilde{B}$ converge. Para eso necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 5.1.1 *Sea $a_0, a_1, \dots$ una sucesión de números complejos tal que $0 < |a_0| \leq |a_1| \leq \dots < 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$. Entonces el producto infinito*

$$B(z) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}$$

converge uniformemente en cada disco $|z| \leq R < 1$. Cada a_n es un cero de $B(z)$, con multiplicidad igual al número de veces en que aparece en la sucesión; y $B(z)$ no tiene otros ceros en $|z| < 1$. Finalmente, $|B(z)| < 1$ en $|z| < 1$, y $|B(e^{i\theta})| = 1$, λ -casi todo punto.

Demostración: Si $|z| \leq R$, $0 < |a_n| < 1$ y $0 < |z| \leq R < 1$, entonces tenemos que

$$|a_n + |a_n|z| \leq |a_n| + |a_n||z| \leq |a_n|(1 + R)$$

y

$$|(1 - \overline{a_n} z) a_n| = |a_n - |a_n|^2 z| \geq |a_n| - |a_n|^2 |z| \geq |a_n|(1 - R).$$

Luego,

$$|a_n + |a_n|z| \leq |a_n|(1 + R) \quad \text{y} \quad \frac{1}{|a_n|(1 - R)} \geq \frac{1}{|(1 - \overline{a_n}z)a_n|}.$$

Con lo cual

$$\frac{|a_n + |a_n|z|(1 - |a_n|)}{|(1 - \overline{a_n}z)a_n|} \leq \frac{2(1 - |a_n|)}{1 - R}.$$

Por lo tanto,

$$\left| 1 - \frac{|a_n|}{a_n} \cdot \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z} \right| = \left| \frac{(a_n + |a_n|z)(1 - |a_n|)}{a_n(1 - \overline{a_n}z)} \right| \leq \frac{2(1 - |a_n|)}{1 - R}.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |a_n|)$ es convergente, por criterio de Weierstrass se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} \left| 1 - \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z} \right|$ converge uniformemente en $|z| \leq R < 1$. Utilizando el teorema C.0.2, $B(z)$ converge uniformemente en cada disco $|z| \leq R < 1$.

Cada función $B_n(z)$ es holomorfa sobre el disco unitario, y la convergencia es uniforme entonces tendremos que $B(z)$ es holomorfa.

Veamos que $|B(z)| \leq 1$ para $|z| < 1$. Sea

$$B_n(z) = \prod_{i=1}^n \frac{|a_i|}{a_i} \frac{a_i - z}{1 - \overline{a_i}z}.$$

Observemos que si $z = x + iy$, $a_i = c + id$ con $x, y, c, d \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} (1 - |a_n|^2)(1 - |z|^2) \geq 0 &\Leftrightarrow (1 - c^2 - b^2)(1 - x^2 - y^2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + b^2x^2 + c^2y^2 + c^2x^2 - x^2 - b^2 + y^2b^2 - c^2 - y^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + b^2x^2 + c^2y^2 - 2bx - 2cy + 2bxcy + c^2x^2 - 2cxyb \\ &\quad + y^2b^2 - x^2 + 2bx - b^2 - c^2 + 2cy - y^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + b^2x^2 + c^2y^2 - 2bx - 2cy + 2bxcy + c^2x^2 - 2cxyb + y^2b^2 \\ &\quad \geq x^2 - 2bx + b^2 + c^2 - 2cy + y^2 \\ &\Leftrightarrow (1 - bx - cy)^2 + (cx - yb)^2 \geq (x - b)^2 + (c - y)^2 \\ &\Leftrightarrow |1 - bx - cy - iyb + icx|^2 \geq |x - b + i(-y + c)|^2 \\ &\Leftrightarrow |1 - (b - ci)(x + iy)| \geq |x - iy - (b - ci)| \\ &\Leftrightarrow |1 - \overline{a_i}z| \geq |\overline{z} - \overline{a_i}|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_i}{a_i} \left(\frac{a_i - z}{1 - \overline{a_i} z} \right) \right| &= \frac{|a_i - z|}{|1 - \overline{a_i} z|} \\ &\leq \frac{|a_i - z|}{|\overline{z} - \overline{a_i}|} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Con lo cual $|B_n(z)| \leq 1$ y por lo tanto $|B(z)| \leq 1$ para cada $|z| \leq 1$. Esto nos permite completar las hipótesis necesarias para utilizar el teorema de Fatou 5.2.3, es decir, $B(z)$ es holomorfa y acotada, por lo tanto existe el límite radial en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$. De esta manera $B(e^{i\theta})$ existe en casi todo punto y $|B(e^{i\theta})| \leq 1$. Así,

$$\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi.$$

Demostremos ahora que $|B(e^{i\theta})| = 1$ en casi todo punto. Consideremos $g(z) = \frac{B(z)}{B_n(z)}$ con $z \in \mathbb{D}$. Como $g(z)$ no es constante, utilizando principio del módulo máximo alcanza su máximo en el borde, es decir,

$$g(0) \leq g(e^{i\theta})$$

o bien,

$$\left| \frac{B(0)}{B_n(0)} \right| \leq \left| \frac{B(e^{i\theta})}{B_n(e^{i\theta})} \right|.$$

Del ejemplo 1 tenemos que $|B_n(e^{i\theta})| = 1$, por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{B(0)}{B_n(0)} \right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta.$$

Utilizando teorema de la convergencia dominada se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{B(0)}{B_n(0)} \right| d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi.$$

Luego

$$2\pi \leq \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi.$$

Por lo tanto

$$\left| B(e^{i\theta}) \right| = 1.$$

Esto finaliza la demostración del teorema (5.1.1), y así podemos afirmar que el producto de Blaschke

$$\tilde{B}(z) = z^m \prod_{a_n \neq 0} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n}z}$$

es una función inner cuando $\sum_{n \geq 0} (1 - |a_n|) < \infty$.

3. Sea f una función definida sobre el disco unitario, tal que

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z},$$

donde $a \in \mathbb{D}$ y $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$. Por lo anterior, f es una función inner. Además los automorfismos del disco son de esta forma. Lo cual queda plasmado en el siguiente teorema (ver [6]).

Teorema 5.1.2 *El grupo de automorfismos del disco unitario puede ser identificado con el subgrupo de las transformaciones de Möbius de la forma*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \overline{a}z},$$

donde $a \in \mathbb{D}$ y $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$.

Demostración: Sea $f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ una transformación de Möbius, que lleva la esfera de Riemann sobre sí misma. Notemos que

$$f'(z) = \frac{1 - a\overline{a}}{(1 - \overline{a}z)^2}$$

la cual es distinta de cero para cada z en la esfera de Riemann.

Observemos que si $a \in \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{D}$ entonces

$$1 - |a| > 0 \quad \text{y} \quad 1 - |z| > 0,$$

luego

$$\begin{aligned}
0 < (1 - a\bar{a})(1 - z\bar{z}) &\Leftrightarrow 0 < 1 + \bar{a}a\bar{z}z - a\bar{a} - \bar{z}z \\
&\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a} < 1 - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}z\bar{z} \\
&\Leftrightarrow (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z}) \\
&\Leftrightarrow \frac{|z - a|}{|1 - \bar{a}z|} < 1 \\
&\Leftrightarrow |f(z)| < 1.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Por lo tanto, f lleva el disco $\mathbb{D}$ en si mismo.

Si $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es un automorfismo conforme ($g'(z) \neq 0$) arbitrario y $a \in \mathbb{D}$ es la única solución de la ecuación $g(z) = 0$, entonces como $f(a) = 0$, la composición $g \circ f^{-1}$ es un automorfismo que fija el origen, ya que

$$g(f^{-1}(0)) = g(a) = 0.$$

Además

$$(g \circ f^{-1})'(0) = \frac{g'(f^{-1}(0))}{f'(f^{-1}(0))} \neq 0.$$

Para continuar con la demostración enunciamos y utilizaremos el lema de Schwarz, se puede ver una prueba en [5].

Lema 9 (Lema de Schwarz) Si $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función holomorfa y $F(0) = 0$, entonces

$$|F(z)| \leq |z| \quad \text{y} \quad |F'(0)| \leq 1.$$

Si se tiene que $|F(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$ o $|F'(0)| = 1$, entonces F es de la forma $F(z) = e^{it}z$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

Utilizando el lema de Schwarz tenemos que $|(g \circ f^{-1})'(0)| \leq 1$. Lo cual nos lleva a analizar dos casos:

- Si $|(g \circ f^{-1})'(0)| < 1$ entonces $|(g \circ f^{-1})(z)| < |z|$ para todo $z \neq 0$. Veamos por qué esto no puede ocurrir. Si consideramos el automorfismo conforme h sobre el disco, tal que $h(0) = 0$, y consideramos otro automorfismo conforme p en el disco, tal que $p(0) = 0$ entonces la derivada $(h \circ p)'(0) = h'(p(0))p'(0) = h'(0)p'(0) \neq 1$. Por otro lado, al considerar $h(z) = (g \circ f^{-1})(z)$

y $p(z) = (f \circ g^{-1})(z)$ tenemos que $(h \circ p)'(z) = 1$, lo cual es una contradicción.

- Si $|(g \circ f^{-1})'(0)| = 1$ entonces $(g \circ f^{-1})(z) = cz$ para alguna constante $c = (g \circ f^{-1})'(0)$ sobre el disco unitario. Con lo cual $c = e^{i\theta}$ y esto implica que $(g \circ f^{-1})(z) = e^{i\theta}z$, y por lo tanto concluimos que $g(z) = e^{i\theta}f(z)$.

Esto finaliza el ejemplo.

4. Sea

$$S_\mu : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, \quad (5.3)$$

tal que

$$S_\mu(z) = \exp \left(- \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right),$$

donde μ es una medida positiva y singular con respecto a la medida de Lebesgue. Observemos que,

- a) $S_\mu(z)$ es holomorfa en $\mathbb{D}$, por ser la composición de funciones holomorfas.
- b) $|S_\mu(z)| \leq 1$.
- c) Como μ es singular con respecto a la medida de Lebesgue, utilizando el corolario (D.0.2) tenemos que $d\mu = 0$ en casi todo punto. Además por teorema (D.0.3)

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\partial \mathbb{D}} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\mu(\theta) = (D\mu)(\theta) = 0,$$

en casi todo θ con respecto a la medida de Lebesgue.

Luego

$$\begin{aligned} \left| \lim_{r \rightarrow 1} \exp \left(- \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta) \right) \right| &= \exp \left(- \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\partial \mathbb{D}} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right) d\mu(\theta) \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Podemos concluir que $S_\mu(z)$ es una función inner.

5. Sea

$$f(z) = \alpha B(z) S_\mu(z)$$

donde $B(z)$ es un producto de Blaschke, $S_\mu(z)$ definida en el ejemplo anterior, y $|\alpha| = 1$. En este caso, $f(z)$ es una función inner. Además, es posible probar la siguiente caracterización de funciones inner (para una demostración de este teorema ver [8]).

Teorema 5.1.3 *Supongamos que c es una constante, $|c| = 1$, B es un producto de Blaschke, μ es una medida Borel finita positiva sobre $\partial\mathbb{D}$, la cual es singular con respecto a la medida de Lebesgue, y*

$$M(z) = cB(z) \exp\left(-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(\theta)\right). \quad (5.4)$$

Entonces M es una función inner. Más aún, cada función inner tiene esta forma.

5.2. Límite no tangencial y extensión armónica

En esta sección estudiaremos propiedades de la extensión armónica y probaremos que la medida armónica asociada a un punto fijo de una función inner es invariante bajo la función borde.

Definición 5.2.1 *Sea $w \in \partial\mathbb{D}$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces*

$$S_\alpha(w) = \left\{ z \in \mathbb{D} : \left| \operatorname{Arg}\left(\frac{w - z}{w}\right) \right| < \alpha \right\}$$

denota el sector inner con vértice w y ángulo inner 2α .

Definición 5.2.2 *Dada una función $f : \mathbb{D} \rightarrow X$, con $X = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, se dice que f tiene límite no tangencial en $w \in \partial\mathbb{D}$ si*

$$\lim_{z \rightarrow w} f(z)$$

con $z \in S_\alpha(w)$ existe para cada $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Este valor lo denotaremos por $f^*(w)$ y será llamado límite no tangencial de f en w .

Definición 5.2.3 Sea $\psi \in L^1(\lambda)$. Se define la extensión armónica de ψ como la función

$$\hat{\psi}(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} \psi(w) P(z, w) d\lambda(w),$$

para cada $z \in \mathbb{D}$, donde $P : \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $P(z, w) = \operatorname{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right)$. Además $\lim_{z \rightarrow w} \hat{\psi}(z) = \psi(w)$ en casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$.

El siguiente resultado, es esencialmente dado por Fatou y Schwarz, y contiene las propiedades básicas de las extensiones armónicas.

Teorema 5.2.1 Dada $\psi \in L^1(\lambda)$,

- a) Para casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$ el límite no tangencial $\hat{\psi}^*(w)$ existe y $\hat{\psi}^* = \psi$ en $L^1(\lambda)$.
- b) Si ψ es continua en algún $w_0 \in \partial\mathbb{D}$, entonces $\lim_{z \rightarrow w_0} \hat{\psi}(z) = \psi(w_0)$, ; si $J \subset \partial\mathbb{D}$ es un conjunto abierto y ψ es continua sobre J , entonces $\lim_{z \rightarrow w} \hat{\psi}(z) = \psi(w)$ uniformemente en $w \in J$.

Demostración:

Dividimos la prueba en parte a) y b).

a) Como ψ es integrable, podemos utilizar teorema D.0.6 de diferenciación de Lebesgue, con el cual para casi todo θ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t |\psi(e^{i\theta+t}) - \psi(e^{i\theta})| dt = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{-t} \int_{-t}^0 |\psi(e^{i\theta+t}) - \psi(e^{i\theta})| dt = 0. \quad (5.5)$$

Supongamos que (5.5) se mantiene para $\theta = 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t |\psi(e^{it}) - \psi(1)| dt = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{-t} \int_{-t}^0 |\psi(e^{it}) - \psi(1)| dt = 0.$$

Es decir, podemos escoger $\epsilon(t) > 0$, tal que existe $\delta > 0$ de forma que si $|t| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t |\psi(e^{it}) - \psi(1)| dt \right| < \epsilon(t) \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{-t} \int_{-t}^0 |\psi(e^{it}) - \psi(1)| dt \right| < \epsilon(t)$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} \epsilon(t) = 0$. Luego

$$\left| \int_0^t |\psi(e^{it}) - \psi(1)| dt \right| < |t| \epsilon(t) \quad \text{y} \quad \left| \int_{-t}^0 |\psi(e^{it}) - \psi(1)| dt \right| < |t| \epsilon(t). \quad (5.6)$$

Denotemos

$$F(t) = |\psi(e^{it}) - \psi(1)|, \quad \phi(t) = \int_0^t F(t) dt. \quad (5.7)$$

Reescribiendo (5.6), tenemos

$$|\phi(e^{it})| \leq \epsilon(t)|t|, \quad |\phi(e^{it})| \leq A|t|, \quad (|t| \leq \pi, A \text{ es una constante}) \quad (5.8)$$

Sea $z \in S_\alpha(1)$, entonces $|\theta| \leq B(1-r)$, donde B es una constante. De esta manera,

$$1-r = \delta \sqrt{\epsilon(\delta)} \Rightarrow |\theta| \leq A\delta \sqrt{\epsilon(\delta)}. \quad (5.9)$$

Utilizando la proposición 4.2.1 tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\varphi - \theta) d\varphi = 1,$$

luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(e^{i\varphi}) P_r(\varphi - \theta) d\varphi - \psi(1) \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \psi(0) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para acotar (5.10) veamos que

$$1. \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{\epsilon(\delta)}.$$

Como $\cos \theta = 1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ entonces

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos \theta + r^2 &= 1 - 2r + 4r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + r^2 \\ &= (1-r)^2 + 4r \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &\geq (1-r)^2 + a^2 \theta^2 \quad (a \text{ es una constante}) \\ &\geq (1-r)^2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Luego,

$$\frac{1}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leq \frac{1}{(1 - r)^2}. \quad (5.12)$$

Por (5.8) y (5.12)

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leq \frac{(1 + r)\delta \epsilon(\delta)}{(1 - r)^2} \leq \frac{2\delta \epsilon(\delta)}{(1 - r)},$$

y por (5.9)

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \leq 2\delta \sqrt{\epsilon(\delta)} \quad (5.13)$$

Utilizando (5.6) y (5.13) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi &\leq \frac{\delta \sqrt{\epsilon(\delta)}}{\pi} \left(\int_{-\delta}^0 F(\varphi) d\varphi + \int_0^{\delta} F(\varphi) d\varphi \right) \\ &\leq \frac{2}{\pi} \sqrt{\epsilon(\delta)} \end{aligned}$$

$$2. \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \leq \frac{4c\delta \sqrt{\epsilon(\delta)}}{a^2\pi}, \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

Si δ es pequeño, entonces por (5.9), $|\theta| \leq \frac{\delta}{2}$. De esta manera $|\theta| \leq \frac{\varphi}{2}$. Con lo cual

$$\begin{aligned} |\theta| \leq \frac{\varphi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{\varphi}{2} \leq -\theta \leq \frac{\varphi}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} \leq \varphi - \theta \leq \frac{3\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

De (5.11) y (5.14) se tiene que

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2} \leq \frac{1 - r^2}{a^2(\varphi - \theta)^2} \leq \frac{8(1 - r)}{a^2\varphi^2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{\pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi &\leq \frac{4(1-r)}{a^2\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{F(\varphi)}{\varphi^2} d\varphi \\
 &\leq \frac{4(1-r)}{a^2\pi} \left(\left[\frac{\phi(\varphi)}{\varphi^2} \right]_{\delta}^{\pi} + 2 \int_{\delta}^{\pi} \frac{\phi(\varphi)}{\varphi^3} d\varphi \right) \\
 &\leq \frac{4(1-r)}{a^2\pi} \left(\left[\frac{\phi(\varphi)}{\varphi^2} \right]_{\delta}^{\pi} + 2A \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\varphi^2} d\varphi \right) \\
 &= \frac{4\delta\sqrt{\epsilon(\delta)}}{a^2\pi} \left(\left[\frac{\phi(\varphi)}{\varphi^2} \right]_{\delta}^{\pi} + 2A \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\varphi^2} d\varphi \right)
 \end{aligned}$$

3. Análogamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \leq \frac{4\delta\sqrt{\epsilon(\delta)}}{a^2\pi} \left(\left[\frac{\phi(\varphi)}{\varphi^2} \right]_{-\pi}^{-\delta} + 2A \int_{-\pi}^{-\delta} \frac{1}{\varphi^2} d\varphi \right). \quad (5.15)$$

Con esto podemos concluir que (5.10) converge a cero cuando δ tiende a cero. Por lo tanto,

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(w) P_r(\varphi - \theta) d\varphi = \psi(0)$$

para cada $z = re^{i\varphi} \in S_{\alpha}(1)$. Esto finaliza la parte a).

b) Podemos suponer que $w_0 = 1$, y así por continuidad de ψ en $w_0 \in \partial\mathbb{D}$, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que,

$$|\varphi| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\psi(e^{i\varphi}) - \psi(1)| < \varepsilon. \quad (5.16)$$

Al igual que en la parte a) podemos ver que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(e^{i\varphi}) P_r(\varphi - \theta) d\varphi - \psi(1) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(e^{i\varphi}) - \psi(1)| P_r(\varphi - \theta) d\varphi. \quad (5.17)$$

Luego utilizando $F(\varphi) = |\psi(e^{i\varphi}) - \psi(1)|$, tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\psi(e^{i\varphi}) - \psi(1)| P_r(\varphi - \theta) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{|\varphi| \leq \delta} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon(1-r^2)}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 2\pi = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para $\frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi$, notemos que si $|\theta| \leq \frac{\delta}{2}$, entonces $|\varphi - \theta| \geq |\varphi| - |\theta| \geq \frac{\delta}{2}$ y $1 - 2r\cos(\varphi - \theta) + r^2 \geq \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)$, y entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\varphi| \leq \pi} F(\varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi &\leq \frac{1-r^2}{2\pi \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \int_{-\pi}^{\pi} (|\psi(e^{i\varphi})| + |\psi(1)|) d\varphi \\ &\leq \frac{1-r}{\pi \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} \int_{-\pi}^{\pi} (|\psi(e^{i\varphi})| + |\psi(1)|) d\varphi \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(e^{i\varphi}) P_r(\varphi - \theta) d\varphi = \psi(1)$, con $z \in \mathbb{D}$.

De manera similar, la segunda parte puede ser probada por medio de la continuidad uniforme de $\psi(e^{i\theta})$ sobre un subconjunto cerrado de J .

Teorema 5.2.2 Si $u : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica acotada, entonces el límite no tangencial $u^*(w)$ existe en casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$ y u es la extensión armónica de u^* , es decir, $\widehat{u^*} = u$. En particular, para $\psi \in L^\infty(\lambda)$, $\widehat{\psi}$ es la única función armónica acotada definida en $\mathbb{D}$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \widehat{\psi}(rw) = \psi(w)$$

para casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$.

Demostración: Sea $0 < \rho < 1$, entonces para $|z| < \rho < 1$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\rho e^{i\varphi}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi, \quad (5.18)$$

donde $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r < \rho$. Asumimos que $0 \leq u(z) \leq M$ en $|z| < 1$.

Para un conjunto de borel E sobre $\partial\mathbb{D}$, podemos definir la función

$$\mu_\rho(E) = \int_E u(\rho e^{i\theta}) d\theta. \quad (5.19)$$

Entonces $0 \leq \mu_\rho(E) \leq M\lambda(E) \leq 2\pi M$. Así, por teorema de Selección (ver Teorema II.4 de [9]), existe $\rho_v \rightarrow 1$, tal que $\mu_{\rho_v} \rightarrow \mu$, donde $0 \leq \mu(E) \leq M\lambda(E)$. Luego μ es una función aditiva y absolutamente continua. Notemos que podemos escribir (5.18) de la forma

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{\rho_v^2 - r^2}{\rho_v^2 - 2\rho_v r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\mu_{\rho_v}(\varphi), \quad |z| < \rho_v,$$

tenemos

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\mu(\varphi), \quad |z| < \rho_v.$$

Como μ es una función aditiva y absolutamente continua, por Radon–Nikodym (ver teorema 6.9 de [8]), $d\mu(\varphi)$ puede ser escrita en la forma $d\mu(\varphi) = f(\varphi)d\varphi$, donde $f(\varphi)$ es una función medible acotada, tal que $0 \leq f(\varphi) \leq M$. Por lo tanto

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi. \quad (5.20)$$

Utilizando teorema 5.2.1 parte a) podemos concluir que el límite no tangencial de u existe en casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$.

Veamos que $u = \widehat{u}^*$. Sea $g(z) = u(z) - \widehat{u}^*(z)$. Luego,

$$\lim_{z \rightarrow w} g(z) = u^*(w) - u^*(w) = 0, \quad (5.21)$$

donde $z \in S_\alpha(w)$. Por (5.20), $u(z)$ tiene la siguiente forma

$$u(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} h(w) P(z, w) d\lambda(w), \quad h \in L^1(\lambda).$$

Esto junto a (5.21) implica que $h(w) = \widehat{u}^*(w)$ en casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$. Por lo tanto $\widehat{u}^* = u$ en casi todo punto.

Observe que este teorema es falso para funciones no acotadas: simplemente tomamos la función armónica $u(z) = \operatorname{Re}((z+1)/(z-1))$, $z \in \mathbb{D}$, para la cual $\lim_{z \rightarrow w} u(z) = 0$ para cada $w \neq 1$ en $\partial\mathbb{D}$ y además $u^* = 0$ en $L^\infty(\lambda)$.

Teorema 5.2.3 (Fatou) *Si $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y acotada, entonces el límite no tangencial de f existe en λ -casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$.*

Demostración: Sea $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y acotada. Podemos escribir $F(z) = u(z) + i v(z)$, donde u es la parte real y v es la parte imaginaria de F . Como F es holomorfa y acotada, entonces u y v son armónicas y acotadas. Por teorema 5.2.2 tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow w} F(z) = \lim_{z \rightarrow w} u(z) + i v(z) = u(w) + i v(w) = F(w),$$

donde $z \in S_\alpha(w)$. Por lo tanto el límite no tangencial existe en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$.

Definición 5.2.4 *Dado $z \in \mathbb{D}$, definiremos la medida armónica λ_z como la única medida de probabilidad sobre $\partial\mathbb{D}$ que satisfase*

$$\frac{d\lambda_z}{d\lambda}(w) = P(z, w)$$

para $w \in \partial\mathbb{D}$.

El hecho que λ_z sea única queda garantizado por el teorema (D.0.4). Además, para cada conjunto de Borel $A \subset \partial\mathbb{D}$,

$$\lambda_z(A) = \int_A P(z, w) d\lambda(w)$$

y, para cada $\psi \in L^1(\lambda)$,

$$\int \psi d\lambda_z = \widehat{\psi}(z),$$

donde

$$\int \psi d\lambda_z = \int \psi \frac{d\lambda_z}{d\lambda} d\lambda = \int \psi(w) P(z, w) d\lambda(w) = \widehat{\psi}(z).$$

A continuación se probará que λ_z es invariante para funciones inner, cuando el punto de Denjoy-Wolff es un punto fijo en $\mathbb{D}$. Escribiremos $f : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$ en lugar de f^* .

La siguiente propiedad nos permite establecer una relación entre los límites no tangenciales y las extensiones armónicas.

Teorema 5.2.4 *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función inner y $\psi \in L^1(\lambda)$, entonces $\psi \circ f \in L^1(\lambda)$ y*

$$\widehat{\psi \circ f} = \widehat{\psi} \circ f.$$

Demostración: Necesitaremos los siguientes resultados

Lema 10 Para $\psi \in L^1(\lambda)$ y $z \in \mathbb{D}$, $|\hat{\psi}(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \|\psi\|_1$.

Demostración: Sea $\psi \in L^1(\lambda)$ y $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |\hat{\psi}(z)| &= \left| \int \psi(w) P(z, w) d\lambda(w) \right| \\ &\leq \int |\psi(w) P(z, w)| d\lambda(w) \\ &\leq \|\psi\|_1 \max_{w \in \partial \mathbb{D}} P(z, w). \end{aligned}$$

Como

$$|w - z| \geq ||w| - |z|| \Leftrightarrow \frac{1}{||w| - |z||} \geq \frac{1}{|w - z|},$$

y

$$\begin{aligned} \max_{w \in \partial D} P(z, w) &= \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \leq \frac{1 - |z|^2}{(|e^{i\theta}| - |z|)^2} \\ &= \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \end{aligned}$$

se tiene que

$$|\hat{\psi}(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \|\psi\|_1.$$

Lema 11 Suponga que $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función inner y sea $\psi : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces

a) Si ψ es continua entonces $\psi \circ f \in L^\infty(\lambda)$ y $\hat{\psi} \circ f = \widehat{\psi \circ f}$.

b) Si $\psi \in L^1(\lambda)$ entonces $\psi \circ f \in L^1(\lambda)$ y

$$\|\psi \circ f\|_1 \leq \frac{1 + |f(0)|}{1 - |f(0)|} \|\psi\|_1.$$

Demostración:

a) Por hipótesis tenemos que ψ es continua sobre el conjunto cerrado $\partial \mathbb{D}$, entonces $|\psi|$ es acotada. Por lo tanto $\int_{\partial D} |\psi| d\lambda(w) < \infty$. Dicho esto, $\hat{\psi}$ es armónica y utilizando el teorema 5.2.1 tenemos que $\lim_{z \rightarrow w} \hat{\psi}(z) = \psi(w)$ para cada $w \in \partial \mathbb{D}$. Además, como f

es una función inner, el $\lim_{r \rightarrow 1} f(rw) = f(w)$, λ -casi todo $w \in \partial\mathbb{D}$. Con esto

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} (\hat{\psi} \circ f)(rw) &= \lim_{r \rightarrow 1} \hat{\psi}(f(rw)) \\ &= \psi(f(w)) \\ &= (\psi \circ f)(w) \end{aligned}$$

λ -casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$.

Veamos que $\psi \circ f \in L^\infty(\lambda)$. Por hipótesis ψ es continua sobre $\partial\mathbb{D}$, por lo que existe $M > 0$ tal que $|\psi(w)| < M$, para todo $w \in \partial\mathbb{D}$. Supongamos que $|(\psi \circ f)(z)| > M$ para cada $z \in Q \subset \partial\mathbb{D}$. Tendremos dos casos $\lambda(Q) \neq 0$ o $\lambda(Q) = 0$. En el caso que $\lambda(Q) \neq 0$ tendremos que $f(z) \notin \partial\mathbb{D}$ para un conjunto de medida no nula, lo cual es una contradicción porque f es una función inner. Luego, $\lambda(Q) = 0$ y por lo tanto $\psi \circ f \in L^\infty(\lambda)$.

Afirmación: $\hat{\psi} \circ f$ es armónica.

Veamos que $\hat{\psi} \circ f = g$ es armónica, consideremos $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, donde $z = x + i y$. Tenemos entonces que

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5.22)$$

y

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (5.23)$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.24)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Sabemos que $\hat{\psi}$ es armónica, y f es analítica, es decir, se cumple que

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial v^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Con lo cual hemos probado que $\hat{\psi} \circ f$ es armónica.

Como $\psi \circ f \in L^\infty$ podemos utilizar el teorema 5.2.2 que nos garantiza que $\widehat{\psi \circ f}$ es la única extensión armónica acotada definida en $\mathbb{D}$ tal que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \widehat{\psi \circ f}(r w) = (\psi \circ f)(w)$$

para casi todo punto $w \in \partial \mathbb{D}$. Pero $\hat{\psi} \circ f$ es armónica, acotada y para casi todo punto $w \in \partial \mathbb{D}$ se cumple que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \hat{\psi} \circ f(r w) = (\psi \circ f)(w).$$

Por lo tanto,

$$\hat{\psi} \circ f = \widehat{\psi \circ f}.$$

- b) Supongamos que ψ_n es continua. Como $P(0, w) = 1$ cuando $w \in \partial D$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \|\psi_n \circ f\|_1 &= \int |\psi_n \circ f| d\lambda \\ &= \int (|\psi_n| \circ f)(w) P(0, w) d\lambda(w) \\ &= \widehat{|\psi| \circ f}(0). \end{aligned}$$

Por la parte a), $\widehat{|\psi_n| \circ f}(0) = \widehat{|\psi_n|}(f(0))$. Al aplicar el lema 10 obtenemos

$$\|\psi_n \circ f\|_1 = |\widehat{\psi_n}|(f(0)) \leq \frac{1 + |f(0)|}{1 - |f(0)|} \|\psi_n\|_1. \quad (5.26)$$

Por densidad de las funciones continuas, tenemos que para todo $\psi \in L^1(\lambda)$ existe una sucesión de funciones continuas tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_1 = \|\psi\|_1$, y así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n \circ f\|_1 = \|\psi \circ f\|_1.$$

Por lo tanto,

$$\|\psi \circ f\|_1 \leq \frac{1 + |f(0)|}{1 - |f(0)|} \|\psi\|_1.$$

Esto finaliza la demostración del Lema.

Prueba del teorema 5.2.4. Por densidad de las funciones continuas en $L^1(\lambda)$ (ver [2]), dada $\psi \in L^1(\lambda)$ podemos tomar una sucesión de funciones continuas $\psi_n : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ que convergen a $\psi \in L^1(\lambda)$. Por lema 10

$$|(\hat{\psi}_n - \hat{\psi})(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \|\psi_n - \psi\|_1$$

para $z \in \mathbb{D}$. Al considerar $g(z) = \frac{1+|z|}{1-|z|}$ con $|z| < r < 1$, tenemos que g es creciente. Luego,

$$\sup_{|z| < r} |(\hat{\psi}_n - \hat{\psi})(z)| \leq \frac{1 + r}{1 - r} \|\psi_n - \psi\|_1 \quad (5.27)$$

para todo $0 < r < 1$. Por lo tanto $\hat{\psi}_n \rightarrow \hat{\psi}$ uniformemente sobre conjuntos compactos y entonces también $\hat{\psi}_n \circ f \rightarrow \hat{\psi} \circ f$ uniformemente sobre conjuntos compactos.

Por lema 11.a) para cada $n \geq 0$, se tiene

$$\hat{\psi}_n \circ f = \widehat{\psi_n \circ f}. \quad (5.28)$$

Además, aplicando el lema 11.b) a $(\psi_n - \psi) \circ f \in L^1(\lambda)$,

$$\|(\psi_n - \psi) \circ f\|_1 \leq \frac{1 + |f(0)|}{1 - |f(0)|} \|\psi_n - \psi\|_1. \quad (5.29)$$

Por (5.27) y (5.29) tenemos que para cada $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} \sup_{|z| < r} |\widehat{(\psi_n \circ f)} - \widehat{\psi \circ f}|(z) &\leq \frac{1+r}{1-r} \|(\psi_n - \psi) \circ f\|_1 \\ &\leq \frac{1+r}{1-r} \frac{1+|f(0)|}{1-|f(0)|} \|\psi_n - \psi\|_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\widehat{\psi_n \circ f} \rightarrow \widehat{\psi \circ f}$ uniformemente sobre conjuntos compactos. Tomando límite en (5.28) obtenemos $\widehat{\psi} \circ f = \widehat{\psi \circ f}$. Esto finaliza la demostración del teorema.

Corolario 5.2.5 *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función inner y $z \in \mathbb{D}$, entonces la medida amónica satisface:*

- a) $\int (\psi \circ f) d\lambda_z = \int \psi d\lambda_{f(z)}$ para cada $\psi \in L^1(\lambda)$.
- b) $\lambda_z(f^{-1}(A)) = \lambda_{f(z)}(A)$ para cada conjunto de Borel $A \subset \partial\mathbb{D}$.
- c) λ_z es f -invariante si y solamente si $f(z) = z$.

Demostración: Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ función inner y $z \in \mathbb{D}$.

Veamos que se cumple parte a). Sea $\psi \in L^1(\lambda)$. Utilizando el teorema 5.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} \int (\psi \circ f) d\lambda_z &= \widehat{\psi \circ f}(z) \\ &= (\widehat{\psi} \circ f)(z) \\ &= \widehat{\psi}(f(z)) \\ &= \int \psi d\lambda_{f(z)}. \end{aligned}$$

Probemos ahora la parte b). Si consideramos ψ como la función característica del conjunto de Borel $A \subset \partial\mathbb{D}$, entonces $\psi \circ f$ es la función característica de $f^{-1}(A)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \psi(f(z)) &= \begin{cases} 1, & \text{si } f(z) \in A \\ 0, & \text{si } f(z) \notin A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{si } z \in f^{-1}(A) \\ 0, & \text{si } z \notin f^{-1}(A). \end{cases} \end{aligned}$$

Utilizando la parte a) tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_z(f^{-1}(A)) &= \int (\psi \circ f) d\lambda_z \\ &= \int \psi d\lambda_{f(z)} \\ &= \lambda_{f(z)}(A).\end{aligned}$$

Demostremos la parte c). Consideramos un Boreliano $A \subset \partial\mathbb{D}$ y supongamos que λ_z es invariante. Por la parte b) se tiene que

$$\lambda_z(f^{-1}(A)) = \lambda_{f(z)}(A) = \lambda_z(A).$$

Luego, $f(z) = z$.

Supongamos ahora que $f(z) = z$. Usando la parte b) se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda_z(f^{-1}(A)) &= \lambda_{f(z)}(A) \\ &= \lambda_z(A).\end{aligned}$$

Por lo tanto, λ_z es invariante. Esto finaliza la demostración del corolario.

5.3. Teorema de Denjoy-Wolff

El siguiente teorema es fundamental para entender la dinámica de funciones holomorfas actuando en el disco unitario.

Teorema 5.3.1 *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa que no es una transformación de Möbius. Entonces existe un punto $p \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = p$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, si $p \in \mathbb{D}$ entonces $|f'(p)| < 1$.*

Demostración: Supongamos que $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función holomorfa y que no es una transformación de Möbius. Dividiremos en dos partes la demostración.

1. Supongamos que existe $x \in \mathbb{D}$, y $n_1 < n_2 < \dots$ tal que $f^{n_j}(x)$ converge al punto $p \in \mathbb{D}$, cuando $j \rightarrow \infty$. Por el lema de Schwarz-Pick (ver [5]), si f pertenece al conjunto de funciones analíticas actuando en $\mathbb{D}$, entonces para $x, y \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|1 - \overline{f(y)}f(x)|} \leq \left| \frac{x - y}{1 - \overline{y}x} \right|, \quad x \neq y,$$

y la igualdad se da si f es una transformación de Möbius. Por otra parte, al considerar $x, y \in \mathbb{D}$ tenemos que la métrica de Poincaré, ver [5], de x a y es

$$d_p(x, y) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{x-y}{1-\bar{x}y} \right|}{1 - \left| \frac{x-y}{1-\bar{x}y} \right|} \right).$$

Luego,

$$\log \left(1 - \left| \frac{f(x) - f(y)}{1 - \overline{f(y)}f(x)} \right| \right) \geq \log \left(1 - \left| \frac{x-y}{1-\bar{y}x} \right| \right)$$

y

$$\log \left(1 + \left| \frac{f(x) - f(y)}{1 - \overline{f(y)}f(x)} \right| \right) \leq \log \left(1 + \left| \frac{x-y}{1-\bar{y}x} \right| \right),$$

con lo cual

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{f(x) - f(y)}{1 - \overline{f(y)}f(x)} \right|}{1 - \left| \frac{f(x) - f(y)}{1 - \overline{f(y)}f(x)} \right|} \right) \leq \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \left| \frac{x-y}{1-\bar{y}x} \right|}{1 - \left| \frac{x-y}{1-\bar{y}x} \right|} \right).$$

Por lo tanto,

$$d_p(f(y), f(x)) \leq d_p(y, x)$$

para todo $x \neq y$ en $\mathbb{D}$. Luego, para todo $n \geq 0$ y $x \in \mathbb{D}$

$$d_p(f^{n+2}(x), f^{n+1}(x)) = d_p(f(f^{n+1}(x)), f(f^n(x))) < d_p(f^{n+1}(x), f^n(x)).$$

Con lo dicho anteriormente, $d_p(f^{n+1}(x), f^n(x))$ es una sucesión decreciente y acotada, entonces $d_p(f^{n+1}(x), f^n(x))$ es convergente cuando $n \rightarrow \infty$. De esta forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_p(f^{n+1}(x), f^n(x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_p(f^{n_j+1}(x), f^{n_j}(x)) = d_p(f(p), p)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_p(f^{n+2}(x), f^{n+1}(x)) = \lim_{j \rightarrow \infty} d_p(f^{n_j+2}(x), f^{n_j+1}(x)) = d_p(f^2(p), f(p)).$$

Por la unicidad del límite tenemos que $d_p(f^2(p), f(p)) = d_p(f(p), p)$. Con lo cual

podemos afirmar que

$$f(p) = p, \quad (5.30)$$

pues si esto no es así entonces

$$d_p(f^2(p), f(p)) < d_p(f(p), p) = d_p(f^2(p), f(p)),$$

lo que es una contradicción.

Para demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = p$ es uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, asumiremos que $p = 0$ (si no, conjugamos f con una transformación de Möbius, puesto que la transformación de Möbius es invariante para d_p).

Considerando $p = 0$ tenemos que $f(0) = 0$, y por lema de Schwarz $|f'(0)| < 1$ y $|f(z)| < |z|$ para todo $0 < |z| < 1$, ya que f no es una transformación de Möbius. Luego, para todo $0 < |z| < 1$ tenemos que $\frac{|f(z)|}{|z|} < 1$.

Si consideramos $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $F(z) = \frac{1}{z}f(z)$ para $z \neq 0$ y $F(0) = f'(0)$, entonces tenemos que $|F(z)| < 1$ para todo $0 \leq |z| < 1$, y por principio del módulo máximo concluimos que el máximo se alcanza en la frontera, es decir, $\lim_{|z| \rightarrow 1} |F(z)| \leq 1$.

Por lo tanto,

$$C_R = \max_{|z| < R} |F(z)| < 1$$

y

$$|f(z)| \leq C_R |z| \leq C_R < R$$

para todo $|z| < R < 1$.

También tenemos que

$$|f^2(z)| = |f(f(z))| \leq C_R |f(z)| \leq C_R^2 |z| < R$$

cuando $|z| < R$. Podemos concluir entonces por medio de inducción que,

$$|f^n(z)| \leq C_R^n |z|,$$

para todo $n \geq 0$ y $|z| < R$. Con esto hemos probado que $f^n(z) \rightarrow 0$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, cuando $n \rightarrow \infty$. Así, $f^n(z)$ converge uniformemente a p sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, cuando $n \rightarrow \infty$.

2. Supongamos que para todo $z \in \mathbb{D}$ la sucesión $\{f^n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene punto de acumulación en $\mathbb{D}$, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| = 1$. Afirmamos que esta convergencia es uniforme sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. En efecto, si esto no es así, entonces existe un conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in K} |f^n(z) - f(z)| \neq 0$, con lo cual podemos escoger una sucesión $\{z_j\}$ en K , alejada de $\partial\mathbb{D}$, y enteros $k_1 < k_2 < \dots$ tales que $|f^{k_j}(z_j)| \leq c < 1$. Como esta sucesión de iterados es uniformemente acotada, tenemos que $\{f^{k_j}\}$ converge uniformemente sobre el conjunto compacto K a la función holomorfa $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que z_j converge al punto $z \in D$ cuando $j \rightarrow \infty$. Entonces

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{k_j}(z) = F(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} f^{k_j}(z_j) \in \mathbb{D}.$$

Hemos probado que la sucesión $f^n(z)$ tiene punto de acumulación en $\mathbb{D}$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Dicho lo anterior, pueden suceder dos situaciones:

- a) Existen $x, y \in \mathbb{D}$, $p_1 \neq p_2$ en $\partial\mathbb{D}$, y sucesiones $n_1 < n_2 < \dots$ y $m_1 < m_2 < \dots$ tales que $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x) = p_1$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{m_j}(y) = p_2$.

Asumimos que $x, y \in \mathbb{D}$, $p_1 \neq p_2 \in \partial\mathbb{D}$ y $n_1 < n_2 < \dots$ y $m_1 < m_2 < \dots$ satisfacen $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(x) = p_1$ y $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{m_j}(y) = p_2$. Tomemos $0 < r < 1$ de tal manera que garantice que x, y pertenecen a $B = \{z \in \mathbb{D} \mid |z| < r\}$, y $f(B) \cap B \neq \emptyset$. Luego, tenemos que $f(f(B) \cap B) \neq \emptyset$, y como $f(f(B) \cap B) \subset f^2(B) \cap f(B)$, entonces $f^2(B) \cap f(B) \neq \emptyset$. De manera inductiva se sigue que $f^{n+1}(B) \cap f^n(B) \neq \emptyset$, para cada $n \geq 0$.

Por otra parte, como B es un conjunto abierto y conexo, tenemos que $f^n(B)$ es abierto y conexo para cada $n \geq 0$. Así, para cada $N \geq 0$, $\bigcup_{n \geq N} f^n(B)$ es un conjunto conexo abierto que acumula en los puntos p_1 y p_2 .

Además como $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| = 1$, uniformemente para $z \in B$, tenemos que $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \forall z \in B$

$$||f^n(z)| - 1| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \varepsilon < |f^n(z)| < 1 + \varepsilon$$

con lo cual podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : 1 - \varepsilon < |z| < 1\}$ contiene $\bigcup_{n \geq N} f^n(B)$ para N suficientemente grande.

Por lo tanto, dados dos puntos $q_1, q_2 \in \partial\mathbb{D}$, que separan p_1 y p_2 , el conjunto

$\bigcup_{n \geq N} f^n(B)$ intersecta al intervalo $S_1 = \{tq_1 | 1 - \varepsilon < t < 1\}$ o al intervalo $S_2 = \{tq_2 | 1 - \varepsilon < t < 1\}$, para N suficientemente grande (si esto no fuese así, entonces tendríamos que $\bigcup_{n \geq N} f^n(B)$ sería desconexo, lo que es una contradicción). Como esto es válido para $\varepsilon > 0$, entonces $\bigcup_{n \geq N} f^n(B)$ se acumula radialmente sobre q_1 o q_2 . Sin embargo, q_1 y q_2 son puntos arbitrarios que separan a p_1 y a p_2 , y como $\bigcup_{n \geq N} f^n(B)$ es conexo, existe un intervalo $J = [p_1, p_2] \in \partial\mathbb{D}$ tal que cada punto es acumulado radialmente por $\bigcup_{n \geq N} f^n(B)$. Ahora tomamos un punto $w \in J$ tal que el límite no-tangencial $f(w)$ existe. Escojemos además puntos $z_j \in B$ y enteros $k_1 < k_2 < \dots$ tal que $f^{k_j}(z_j)$ converge radialmente a w cuando $j \rightarrow \infty$. Sin pérdida de generalidad asumiremos que z_j converge a $\tilde{z}$ cuando $j \rightarrow \infty$, y que f^{k_j} converge uniformemente sobre conjuntos compactos a la función $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| = 1$ para todo $z \in \mathbb{D}$, obtenemos que $F(\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D}$, y entonces F debe ser constante, es decir, $F(z) = w$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Con esto

$$\begin{aligned}
 f(w) &= \lim_{j \rightarrow \infty} f(f^{k_j}(z_j)) \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} f^{k_j+1}(z_j) \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} f^{k_j}(f(z_j)) \\
 &= F(f(\tilde{z})) \\
 &= w.
 \end{aligned}$$

Hemos demostrando que la función frontera de f satisface $f(w) = w$, para casi todo punto $w \in J$. Haremos uso del siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [9].

Lema 12 *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa acotada y $f^*(w) = 0$ para w en un conjunto de medida de Lebesgue positivo entonces $f \equiv 0$.*

Como J tiene medida de Lebesgue positiva, por lema 12 aplicado a la función $G(z) = f(z) - z$, se tiene que $f(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Pero por hipótesis f no es una transformación de Möbius, por lo tanto tenemos una contradicción.

- b) Al descartar que sucede la parte a), tenemos que existe un punto $p \in \partial\mathbb{D}$ tal que $f^n(z) \rightarrow p$ uniformemente sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$, cuan-

do $n \rightarrow \infty$.

Definición 5.3.1 *El punto $p \in \overline{\mathbb{D}}$ descrito en el teorema anterior es llamado punto de Denjoy-Wolff de f .*

Corolario 5.3.2 *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una función inner y sea $p \in \overline{\mathbb{D}}$ un punto de Denjoy-Wolff.*

- a) *Si $p \in \mathbb{D}$, entonces la función frontera f preserva la medida armónica λ_p .*
- b) *Si $p \in \partial\mathbb{D}$, entonces para cada vecindad W de $p \in \partial\mathbb{D}$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \# \{0 \leq j < n \mid f^j(w) \in W\} = 1$$

para casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$.

Demostración:

- a) Sea $p \in \mathbb{D}$ un punto de Denjoy-Wolff, entonces de (5.30) tenemos que $f(p) = p$. Aplicando corolario 5.2.5 tenemos que f preserva la medida armónica λ_p .
- b) Si ψ la función característica de W , tenemos que $f^j(w) \in W$ si y solamente si, $(\psi \circ f^j)(w) = 1$, con lo cual

$$\# \{0 \leq j < n : f^j(w) \in W\} = \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ f^j)(w),$$

para casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$. Denotemos $z_n = f^n(0)$. Aplicando corolario 5.2.5 tenemos que

$$\int (\psi \circ f^j) d\lambda = \int \psi d\lambda_{z_j} = \hat{\psi}(z_j). \quad (5.31)$$

Pero como p es un punto de Denjoy-Wolff tenemos que $z_n \rightarrow p$, cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto por teorema 5.2.1 parte b) $\hat{\psi}(z_n) \rightarrow \psi(p) = 1$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Como $|\psi \circ f^j| \leq 1$, entonces $|\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ f^j)| \leq 1$. De esta forma, podemos utilizar la

convergencia dominada y la relación (5.31), para tener que

$$\begin{aligned}
 \int \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ f^j) \right) d\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \int (\psi \circ f^j) d\lambda \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{\psi}(z_j) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\psi}(z_n) \\
 &= \psi(p) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Hemos demostrado entonces que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ f^j)(w) = 1$, para casi todo punto $w \in \partial\mathbb{D}$.

5.4. Ergodicidad de funciones inner

Teorema 5.4.1 *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ es una función inner entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) f^* es exacta.
- b) f^* es ergódica.
- c) Existe $a, b \in \mathbb{D}$ tal que $f^n(a) \neq f^n(b)$ para $n \geq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(a), f^n(b)) = 0$.
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(x), f^n(y)) = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{D}$.

Demostración:

a) $\Rightarrow$ b). Esto se debe a que $T^{-1}(A) = A$ implica que $T^{-n}(A) = A$ para todo $n \geq 0$, y entonces $A \in \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}(\mathcal{A})$. Luego $\mu(A) = 0$ o $\mu(A) = 1$.

c) $\Rightarrow$ d).

Para eso necesitaremos el siguiente hecho, dado $g_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ una sucesión de funciones holomorfas tal que $g_n \rightarrow g$, uniformemente sobre compactos, cuando $n \rightarrow \infty$, tal que $g_n^{-1}(\{0\}) \subseteq g_{n+1}^{-1}(\{0\})$ para todo $n \geq 0$ y donde $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces $g \equiv 0$ o $g^{-1}(\{0\}) = \bigcup_{n \geq 0} g_n^{-1}(\{0\})$.

Continuando con la demostración de $c) \rightarrow d)$, tenemos por la desigualdad triangular que

$$d_P(f^n(x), f^n(y)) \leq d_P(f^n(x), f^n(0)) + d_P(f^n(0), f^n(y)).$$

Lo que haremos es probar que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que $d_P(f^n(z), f^n(0)) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Para esto encontraremos una subsucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ que satisfice $d_P(f^{n_k}(z), f^{n_k}(0)) \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$. Esto, junto al hecho que la métrica de Poincaré decrece distancias implicará que $d_P(f^n(z), f^n(0))$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Si $a = 0$, por c) existe algún $b \in \mathbb{D}$, tal que $f^n(0) \neq f^n(b)$, $n \geq 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(0), f^n(b)) = 0$. Además escogemos para cada $n \geq 0$ una sucesión de transformaciones de Möbius $T_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, tal que $T_n f^n(0) = 0$, y una subsucesión $n_0 < n_1 < \dots$ tal que $g_k = T_{n_k} \circ f^{n_k} : D \rightarrow \mathbb{D}$ converge uniformemente sobre compactos a g . De esta forma $g_k^{-1}(\{0\}) = f^{-n_k}(T_{n_k}^{-1}(\{0\})) = f^{n_k}(\{f^{n_k}(0)\})$.

Afirmamos que $g_k^{-1}(\{0\}) \subseteq g_{k+1}^{-1}(\{0\})$, $k \geq 1$. En efecto, si $g_n(z_0) = 0$ entonces $T_n(f^n(z_0)) = 0$. Luego, $f^n(z_0) = T_n^{-1}(0) = f^n(0)$. Así,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(f^{n+1}(z_0)) &= T_{n+1}(f(f^n(z_0))) \\ &= T_{n+1}(f(f^n(0))) \\ &= T_{n+1}f^{n+1}(0) = 0. \end{aligned}$$

Ahora como $f^n(0) \neq f^n(b)$, entonces $T_k f^k(b) \neq 0$. En efecto, si $T_k f^k(b) = 0$, entonces $f^k(b) = T_k^{-1}(0) = f^k(0)$, lo que es una contradicción. Esto implica que $g_k(b) \neq 0$, para cada k , y así

$$b \notin \bigcup_{k \geq 0} g_k^{-1}(\{0\}).$$

Por otro lado $g(b) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(b) = 0$, ya que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_P(g_k(b), 0) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_P(T_{n_k} f^{n_k}(b), T_{n_k} f^{n_k}(0)) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_P(f^{n_k}(b), f^{n_k}(0)) = 0.$$

De esta forma $g \equiv 0$ ya que b es un cero de g , y no es cero de g_k . Luego, para todo $z \in \mathbb{D}$

se tiene que

$$\begin{aligned} 0 = d_P(g(z), 0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} d_P(g_k(z), 0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} d_P(T_{n_k}^{n_k}(z), T_{n_k}^{n_k}(0)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} d_P(f^{n_k}(z), f^{n_k}(0)), \end{aligned}$$

con lo cual $\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(z), f^n(0)) = 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, y concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(x), f^n(y)) = 0$$

para todo $x, y \in \mathbb{D}$. Esto finaliza la demostración.

$d) \Rightarrow a)$.

Sea $\mathcal{A}$ una σ -álgebra de Borelianos de S^1 y suponga que $A \in \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{A})$. Entonces $A = f^{-n}(A_n)$, $A_n \in \mathcal{A}$. Lo que necesitamos probar es que $\lambda(A) = 0$ o $\lambda(A) = 1$. Sea $\psi = \mathcal{X}_A$ y $\psi_n = \mathcal{X}_{A_n}$. Luego considerando que $A = f^{-n}(A_n)$ es el conjunto de los puntos que iterados n veces caen en A_n , tenemos que

$$[z \in A \Rightarrow \mathcal{X}_A = 1] \text{ y } [f^n(z) \in A_n \Rightarrow \mathcal{X}_{A_n}(f^n(z)) = 1]$$

y además,

$$[z \notin A \Rightarrow \mathcal{X}_A = 0] \text{ y } [f^n(z) \notin A_n \Rightarrow \mathcal{X}_{A_n}(f^n(z)) = 0].$$

Esto quiere decir que

$$\psi_n \circ f^n = \psi. \quad (5.32)$$

Por teorema 5.2.4 tenemos que $\hat{\psi} \circ f = \widehat{\psi \circ f}$, y junto a (5.32) implica que

$$\hat{\psi}_n \circ f^n = \widehat{\psi_n \circ f^n} = \hat{\psi}.$$

Sea $x, y \in \mathbb{D}$ dados. Para todo $n \geq 0$

$$\hat{\psi}(z) - \hat{\psi}(y) = \hat{\psi}_n(f^n(x)) - \hat{\psi}_n(f^n(y)). \quad (5.33)$$

Para cada $n \geq 0$ escogemos $T_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una transformación de Möbius con $T_n(0) =$

$f^n(x)$. Como $\widehat{\psi_n \circ T_n} = \hat{\psi}_n \circ T_n$, se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_n(f^n(x)) - \hat{\psi}_n(f^n(y)) &= \widehat{\psi_n \circ T_n}(0) - \widehat{\psi_n \circ T_n}(T_n^{-1}(f^n(y))) \\ &= \int \psi_n(T_n(w)) [1 - P(T_n^{-1}f^n(y), w)] d\lambda(w).\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(T_n^{-1}f^n(y), 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(y), T_n(0)) \quad (\text{Por ser isometría}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(y), f^n(x)) \quad (\text{por hipótesis}) \\ &= 0,\end{aligned}$$

con lo cual, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^{-1}(f^n(y)) = 0$.

Utilizando (5.33) se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\hat{\psi}_n(f^n(x)) - \hat{\psi}_n(f^n(y))] = 0 \Rightarrow \hat{\psi}(x) = \hat{\psi}(y),$$

es decir, $\hat{\psi}$ es constante. Luego por teorema 5.2.1.a) $\psi = \hat{\psi}^*$ es constante.

Como ψ es la función característica de A , tenemos que $\lambda(A) = 0$ o $\lambda(A) = 1$, como se quería demostrar.

b) $\Rightarrow$ c).

Supongamos por el contrario que *c)* no es cierto. Entonces tenemos que demostrar que f no es ergódica. En otras palabras, suponemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d_P(f^n(x), f^n(y)) > 0$ para todo $x, y \in D$, tal que $f^n(x) \neq f^n(y)$, $\forall n \geq 0$ y debemos demostrar que existe h^* tal que $h^* \circ f = h^*$ con h^* no constante en casi todo punto. Utilizaremos el siguiente lema, cuya demostración puede ser encontrada en la página 45 de [4] o [1].

Lema 13 *Existe $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa y T transformación de Möbius, sin puntos fijos, tal que*

$$g \circ f = T \circ g.$$

Como T no tiene puntos fijos entonces tiene un punto fijo en $\partial\mathbb{D}$ (parabólica) o tiene dos puntos fijos en $\partial\mathbb{D}$ (hiperbólica). Así, existe un boreliano $A \subset S^1$ tal que $0 <$

$\lambda(A) < 1$ y $T^{-1}(A) = A$. Entonces $\mathcal{X}_A$ satisface $\mathcal{X}_A \circ T = \mathcal{X}_A$ y definiendo $h = \hat{\mathcal{X}}_A \circ g$,

$$\begin{aligned} h \circ f &= (\widehat{\mathcal{X}_A \circ T} \circ g) \circ f \\ &= \hat{\mathcal{X}}_A \circ T \circ g \\ &= \widehat{\mathcal{X}_A \circ T} \circ g \\ &= \hat{X}_A \circ g \\ &= h. \end{aligned}$$

Como h es acotada, por teorema 5.2.2 tenemos que

$$h = \widehat{h^*}.$$

Luego,

$$\widehat{h^* \circ f} = \widehat{h^*} \circ f = h \circ f = h = \widehat{h^*}.$$

Tomando límites no tangenciales se obtiene

$$h^* \circ f = h^*.$$

Así, h^* es f -invariante. Veamos ahora que h^* es no constante. Para esto basta ver que $h = \hat{\mathcal{X}}_A \circ g$ no es constante, ya que así $\widehat{h^*}$ no es constante, y acotada. Luego por teorema 5.2.2, h^* no es constante. Para ver que $\hat{\mathcal{X}}_A \circ g$ no es constante, basta ver que $\hat{\mathcal{X}}_A|_{g(\mathbb{D})}$ no es constante. Es decir, basta ver que $\hat{\mathcal{X}}_A$ no es constante y $g(\mathbb{D})$ no es constante. Observe que $\mathcal{X}_A$ no es constante, ya que $0 < \lambda(A) < 1$, y así $\hat{\mathcal{X}}_A$ no es constante. Para ver que $g(\mathbb{D})$ no es constante, notemos que

$$g \circ f = T \circ g \Rightarrow g(y) = T(\tilde{y}).$$

Pero T no tiene puntos fijos, luego g no es constante y $g(\mathbb{D}) \neq \emptyset$.

Esto finaliza la demostración del teorema 5.4.1.

Apéndice A

Elementos Básicos de Teoría de la Medida

A.1. Espacios medibles

Definición A.1.1 Sea X un conjunto no vacío. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es un álgebra si las siguientes condiciones se verifican.

1. $X \in \mathcal{A}$
2. si $A \in \mathcal{A}$ entonces $X - A \in \mathcal{A}$,
3. si $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ entonces $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Observación: De lo anterior podemos concluir que

- Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$
- Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \setminus B \in \mathcal{A}$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ entonces $\cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$
- Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ entonces $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$

Definición A.1.2 Una σ -álgebra de subconjuntos de X es una álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X que es también cerrada bajo unión contable de conjuntos, es decir,

$$A_j \in \mathcal{A} \text{ para } j = 1, \dots, n, \dots \text{ implica } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}.$$

Entonces $\mathcal{A}$ es también cerrada para intersecciones contables, es decir,

$$A_j \in \mathcal{A} \text{ para } j = 1, \dots, n, \dots \text{ implica } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c \right)^c \in \mathcal{A}.$$

Definición A.1.3 Un espacio medible es un par $(X, \mathcal{A})$ donde X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra de subconjuntos de X . Los elementos de $\mathcal{A}$ son llamados conjuntos medibles.

Proposición A.1.1 Consideremos una familia no vacía $\{\mathcal{B}_i : i \in I\}$ (Donde I es un conjunto arbitrario cuyo uso es indexar los elementos ...) de σ -álgebra de subconjuntos del mismo conjunto X . Entonces la intersección $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i$ es también una σ -álgebra de subconjuntos de X .

Definición A.1.4 La σ -álgebra generada por la familia $\mathcal{E}$ de subconjuntos de X es la σ -álgebra más pequeña $\sigma(\mathcal{E})$ que contiene a $\mathcal{E}$ o, en otras palabras, la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a $\mathcal{E}$.

Definición A.1.5 Llamamos un espacio topológico a un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una familia de subconjuntos de X que contiene $\{\emptyset, X\}$ y es cerrado bajo intersecciones finitas y uniones arbitrarias. τ es llamada una topología y sus elementos son llamados conjuntos abiertos de X .

Definición A.1.6 La σ -álgebra de Borel de un espacio topológico es la σ -álgebra $\sigma(\tau)$ generada por la topología τ , que es la más pequeña σ -álgebra que contiene todo subconjunto abierto de X . Los elementos de $\sigma(\tau)$ son llamados conjuntos de Borel de X . Los subconjuntos cerrados de X , también están en la σ -álgebra de Borel.

A.2. Espacios de medida

Sea $(X, \mathcal{B})$ ser un espacio de medible.

Definición A.2.1 Una medida sobre $(X, \mathcal{B})$ es una función $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ y

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

para una familia contable de pares disjuntos de conjuntos $A_i \in \mathcal{B}$. Esta propiedad es llamada aditividad contable o σ – aditividad. Entonces $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es llamada un espacio de medida. Si $\mu(X) < \infty$ entonces decimos que μ es una medida finita y si $\mu(X) = 1$ entonces μ es una medida de probabilidad. En este caso, $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es llamado un espacio de probabilidad.

Definición A.2.2 Se dice que μ es σ – finito si existe una secuencia $A_1, \dots, A_n, \dots$ de subconjuntos de X tal que $\mu(A_i) < \infty$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

una función $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ es llamada finitamente aditiva si

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) = \sum_{j=1}^N \mu(A_j)$$

para una familia finita $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{B}$ de pares disjuntos de subconjuntos.

Observación: Note que si μ es σ – aditiva entonces también es finitamente aditiva.

Teorema A.2.1 (Extensión). Sea $\mathcal{A}$ una álgebra de subconjuntos de X y sea $\mu_0 : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ ser una función σ – aditiva con $\mu_0(X) < \infty$. Entonces existe una única medida μ definida sobre la σ – álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{A}$ que es una extensión de μ_0 , lo que significa que $\mu(A) = \mu_0(A)$ para cada $A \in \mathcal{A}$.

Definición A.2.3 Se dice que una familia no vacía $\mathcal{C}$ de subconjuntos de X es una clase monótona si $\mathcal{C}$ contiene a X y cumple que

- Si $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ están en $\mathcal{C}$ entonces $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{C}$, y
- Si $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ están en $\mathcal{C}$ entonces $\bigcap_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{C}$, y

Teorema A.2.2 ((Clases monótonas)) La clase monótona más pequeña que contiene una álgebra $\mathcal{A}$ coincide con la σ – álgebra $\sigma(\mathcal{A})$ generada por $\mathcal{A}$.

Teorema A.2.3 [(Aproximación)] Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{A}$ es una álgebra de subconjuntos de X que genera $\mathcal{B}$. Entonces, para cada $\epsilon > 0$ y cada $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A \Delta B) < \epsilon$.

Definición A.2.4 Sea (X, τ) ser un espacio topológico y μ una medida sobre la σ -álgebra de Borel de X . el soporte de la medida μ es el conjunto $\text{supp } \mu$ formado por los puntos $x \in X$ tal que $\mu(V) > 0$ para alguna vecindad V de x .

Proposición A.2.1 Si X es un espacio topológico con una base contable de conjuntos abiertos y μ es una medida distinta de cero sobre X , entonces el soporte $\text{supp } \mu$ es no vacío.

A.3. Funciones medibles

Las funciones medibles en teoría de la medida cumplen un rol similar al de las aplicaciones continuas en topología.

Definición A.3.1 Dados los espacios medibles $(X, \mathcal{B})$ y $(Y, \mathcal{C})$, decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es medible si $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ para cada $C \in \mathcal{C}$.

Proposición A.3.1 Sea $f, g : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible y $a, b \in \mathbb{R}$. entonces la siguientes funciones también son medibles:

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x) \text{ y } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Además, si $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ es una secuencia de funciones medibles, entonces las siguientes funciones son también medibles:

$$s(x) = \sup\{f_n(x) : n \geq 1\} \text{ y } i(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq 1\},$$

$$f^*(x) = \limsup_n f_n(x) \text{ y } f_*(x) = \liminf_n f_n(x).$$

En particular, si $f(x) = \lim f_n(x)$ existe entonces f es medible.

Definición A.3.2 Se dice que una función $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ es simple si existen constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ y para parejas disjuntas de los conjuntos medibles $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ tal que

$$s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathcal{X}_{A_j} \tag{A.1}$$

Donde $\mathcal{X}_A$ es la función característica del conjunto A .

Proposición A.3.2 *Sea $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible. Entonces existe una secuencia $(s_n)_n$ de funciones simples tal que $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ para cada n y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Si f toma valores en $\mathbb{R}$, entonces cada s_n con valores en $\mathbb{R}$. Si f es acotado, la sucesión $(s_n)_n$ puede ser escogida de tal manera que la convergencia es uniforme. Si f es no negativa, nosotros podemos tomar $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.

Apéndice B

Integración en Espacios de Medida

B.1. Integral de Lebesgue

Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de medida.

Definición B.1.1 Sea $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathcal{X}_{A_j}$ una función simple. La integral de s esta dada por:

$$\int s d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mu(A_j).$$

Definición B.1.2 Sea $f : X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible no negativa. Entonces

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu,$$

donde $s_1 \leq s_2 \leq \dots$, es una suceción no decreciente de funciones simples tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$ para cada $x \in X$.

Consideremos la función $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$, nosotros podemos siempre escribir $f = f^+ - f^-$ con

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \text{ y } f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Podemos ver que f^+ y f^- son no negativas. Además, por proposición A.3.1, son funciones medibles.

Definición B.1.3 Sea $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible. Entonces

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

Siempre que una de las integrales del lado derecho sea finita (con los convenios usuales que $(+\infty) - a = +\infty$ y $a - (+\infty) = -\infty$ para cada $a \in \mathbb{R}$).

Definición B.1.4 *Una función $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ es integrable si esta es medible y su integral es un número real. Nosotros denotamos al conjunto de todas las funciones integrables como $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ o, simplemente, como $\mathcal{L}^1(\mu)$.*

Dada una función medible $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ y un conjunto medible E , se define la integral de f sobre E como

$$\int_E f d\mu = \int f \mathcal{X}_E d\mu,$$

donde $\mathcal{X}_E$ es la función característica del conjunto E .

Proposición B.1.1 *El conjunto $\mathcal{L}^1(\mu)$ de todas las funciones reales integrables es un espacio vectorial. Además, la aplicación $I : \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $I(f) = \int f d\mu$ es una función lineal positiva:*

- (1) $\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$, y
- (2) $\int f d\mu \geq \int g d\mu$ si $f(x) \geq g(x)$ para cada x .

En particular, $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ si $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Además, $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ si y solamente si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

La noción de integral de Lebesgue puede ser extendida a una clase de funciones más amplias. Podemos considerar la función compleja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. En este caso, decimos que f es integrable si y solamente si la parte real de f y la parte imaginaria de f ambas son integrables. Entonces por definición,

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int \operatorname{Im}(f) d\mu.$$

Definición B.1.5 *Diremos que una propiedad se sostiene en μ – casi todo punto (o μ – casi cualquier parte) si el conjunto de puntos de X en donde la propiedad no se cumple esta contenido en algún conjunto con medida cero.*

B.2. Teorema de convergencia

A continuación se mencionarán tres resultados importantes concernientes a la convergencia de funciones bajo el signo de la integral.

Teorema B.2.1 (*Convergencia Monótona*) Sea $f_n : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas. Considerar la función $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ definida por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f(x) d\mu.$$

El siguiente resultado considera sucesiones no necesariamente monótonas.

Teorema B.2.2 (*Lema de Fatou*) Sea $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces la función $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ definida por $f(x) = \liminf_n f_n(x)$ es integrable y satisface

$$\int \liminf_n f_n(x) d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Teorema B.2.3 (*Convergencia Dominada*) Sea $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles y asumimos que existe alguna función integrable $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para μ – casi todo x en X . Asumimos además que la sucesión $(f_n)_n$ converge en μ – casi todo punto de alguna función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces f es integrable y satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Apéndice C

Convergencia de Productos

Definición C.0.1 Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números complejos no nulos, diremos que el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a P , si la sucesión de productos parciales $P_N = a_1 a_2 \cdots a_N$ converge a un límite no nulo P .

Si los productos infinitos (parciales) convergen a cero o a infinito entonces diremos que el producto diverge.

Observación: Aceptamos decir que un producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ existe si:

1. como máximo, un número finito de factores es cero,
2. el producto de los términos que no desaparecen existe en el sentido anterior.

Proposición C.0.1 Sea $\operatorname{Re}(a_n) > 0$ para todo $n \geq 1$. Entonces $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a un número distinto de cero si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ converge.

Proposición C.0.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ converge absolutamente si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ converge absolutamente.

Definición C.0.2 Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Re}(a_n) > 0$ entonces se dirá que el producto infinito

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n$$

converge absolutamente si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$$

converge absolutamente.

Corolario C.0.1 Si $\operatorname{Re}(a_n) > 0$ entonces el producto $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si y solo si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ converge absolutamente.

Teorema C.0.2 Sea una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que f_n pertenece al conjunto de todas las funciones holomorfas sobre Ω , tal que f_n no es idénticamente nula en cualquier componente de Ω , y

$$\sum_{n=0}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω . Entonces

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω . Por lo tanto f pertenece al conjunto de todas las funciones holomorfas.

Apéndice D

Diferenciación

Definición D.0.1 Para cada $E \in \Omega$ con $x \in E$ y $\text{diam}(E) < \delta$, entonces se que μ es diferenciable en x , y denotamos

$$(D\mu)(x) = A. \quad (\text{D.1})$$

Definición D.0.2 Si μ es una medida real de Borel sobre $\mathbb{R}^k$, nosotros podemos definir la derivada superior e inferior de μ en cada punto $x \in \mathbb{R}^k$. Para cada $r > 0$, tenemos

$$\overline{\Delta}_r(x) = \sup \left\{ \frac{\mu(E)}{m(E)} : x \in E, E \in \Omega, \text{diam}(E) < r \right\}, \quad (\text{D.2})$$

donde Ω es una familia substancial dada, y se define la derivada superior de μ en x por

$$(\overline{D}\mu)(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{\Delta}_r(x). \quad (\text{D.3})$$

ya que $r \geq s$ implica $\overline{\Delta}_r(x) \geq \overline{\Delta}_s(x)$, el límite en (D.3) existe, como un número en $[-\infty, \infty]$.

Además si reemplazamos $\sup$ por $\inf$ en (D.2), obtenemos $\underline{\Delta}_r(x)$, y se define

$$(\underline{D}\mu)(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \underline{\Delta}_r(x).$$

Observación:

1. μ es diferenciable en x si y solo si $(\overline{D}\mu)(x)$ y $(\underline{D}\mu)(x)$ son iguales y finitos.
2. $(\underline{D}\mu)(x) \leq (\overline{D}\mu)(x)$ siempre se cumple.

Teorema D.0.1 Sea Ω una familia sustancial en $\mathbb{R}^k$. Si μ es una medida de Borel compleja sobre $\mathbb{R}^k$, entonces

a) μ es diferenciable en casi todo punto $[m]$,

b) $D\mu \in L^1(\mathbb{R}^k)$,

c) Para cada conjunto de Borel E ,

$$\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E (D\mu)(x) dx$$

donde $\mu_s \perp m$ y $(D\mu_s)(x) = 0$ en casi todo punto $[m]$.

De lo anterior podemos concluir el siguiente corolario.

Corolario D.0.2 1. $\mu \perp m$ si y solamente si $(D\mu)(x) = 0$ en casi todo punto $[m]$.

2. $\mu \ll m$ si y solamente si

$$\mu(E) = \int_E (D\mu)(x) dx;$$

en este caso, la derivada $(D\mu)(x)$ coincide en casi todo punto con la derivada de Radon-Nikodym $d\mu/dm$.

Teorema D.0.3 Supongamos que μ es una medida de Borel real sobre T , $J(\theta; s) = \{e^{it} : \theta - s < t < \theta + s\}$. Se define

$$(\overline{D}\mu)(\theta) = \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{\mu(J(\theta; s))}{2s} \quad (D.4)$$

y $(D\mu)(\theta)$ y $(\underline{D}\mu)(\theta)$ se definen de manera análoga, con $\lim$ y $\liminf$ en lugar de $\limsup$. Si

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t) \quad (0 \leq r < 1) \quad (D.5)$$

Entonces

$$(\underline{D}\mu)(\theta) \leq \liminf_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) \leq \limsup_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) \leq (\overline{D}\mu)(\theta) \quad (D.6)$$

para cada θ , y

$$\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) = (D\mu)(\theta) \quad (D.7)$$

existe y es finito para casi todo θ respecto a la medida de Lebesgue.

Teorema D.0.4 Sea μ y λ medidas positivas y acotadas sobre una σ -álgebra M y un conjunto X .

1. Existe un único par de medidas λ_a y λ_s sobre M tal que

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu. \quad (\text{D.8})$$

Estas medidas son positivas, y $\lambda_a \perp \lambda_s$.

2. Existe una única $h \in L^1(\mu)$ tal que

$$\lambda_a(E) = \int_E h d\mu \quad (E \in M). \quad (\text{D.9})$$

El par λ_a y λ_s son llamados descomposición de Lebesgue de λ relativo a μ .

Definición D.0.3 Sea m la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^n$, A un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $a \in \mathbb{R}^n$ es un punto denso de A si el conjunto A cumple con

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(B(a, \delta) \cap A)}{m(B(a, \delta))} = 1.$$

Donde $B(a, \delta)$ es la bola de centro a y radio δ .

Teorema D.0.5 Sea A un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ con medida de Lebesgue $m(A)$ positiva. Entonces en m -casi todo punto $a \in A$ es un punto denso de A .

Teorema D.0.6 (Diferenciación de Lebesgue) Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces los promedios

$$\frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y) - f(x)| dy$$

tienden a cero cuando $Q \rightarrow x$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Apéndice E

Medidas en Espacios Métricos

E.1. Espacios métricos completos separables

Definición E.1.1 *una medida μ sobre un espacio topológico es tight si para cada $\epsilon > 0$ existe un subconjunto compacto K tal que $\mu(K^c) < \epsilon$.*

Proposición E.1.1 *Cada medida de probabilidad sobre un espacio métrico separable es tight.*

Corolario E.1.1 *Asumimos que M es espacio métrico completo y μ es una medida de probabilidad sobre M . Para cada $\epsilon > 0$ y cada conjunto de Borel $B \subset M$ existe un conjunto compacto $L \subset B$ tal que $\mu(B - L) < \epsilon$.*

E.2. Espacio de funciones continuas

Sea M un espacio métrico compacto. $C^0(M)$ es el conjunto de las funciones continuas, real o complejas, definidas sobre M . Consideramos sobre este espacio la norma

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(x)| : x \in M\}.$$

Esta norma dota a $C^0(M)$ con la estructura de un espacio de Banach.

Definición E.2.1 *Se dice que el funcional lineal $\Phi : C^0(M) \rightarrow \mathbb{C}$ es positivo si $\Phi(\varphi) \geq 0$ para cada función $\varphi \in C^0(M)$ con $\varphi(x) \geq 0$ para cada $x \in M$.*

Teorema E.2.1 (Riesz-Markov) *Sea M un espacio métrico compacto, $\Phi : C^0(M) \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal positivo. Entonces existe una única medida Borel finita μ sobre M tal que*

$$\Phi(\varphi) = \int \varphi \, d\mu \quad \text{para cada } \varphi \in C^0(M).$$

Además, μ es una medida de probabilidad si y solamente si $\Phi(1) = 1$.

Bibliografía

- [1] AARONSON, J. *An introduction to infinite ergodic theory*. American Mathematical Society, 1997.
- [2] ADAMS, R., AND FOURNIER, J. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [3] CONWAY, J. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, 1995.
- [4] DOERING, C., AND MAÑÉ, R. *The dynamics of inner Functions*. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.
- [5] KRANTZ, S. *Geometric Function Theory: explorations in complex analysis*. Birkhäuser Boston, 2006.
- [6] MILNOR, J. *Dynamics in One Complex Variable*. Princeton University Press, 2006.
- [7] OLIVEIRA, K., AND VIANA, M. *Foundations of Ergodic Theory*. Cambridge University Press, 2016.
- [8] RUDIN, W. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1970.
- [9] TSUJII, M. *Potential Theory in Modern Function Theory*. Chelsea Publishing Company New York,N.Y., 1975.