



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Insituto de Matemáticas

Invariantes Polinomiales para Tied Links

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
O'BRYAN ALEXANDER CÁRDENAS ANDAUR

Profesor Guía: Dr. Jesús Juyumaya Rojas

VALPARAÍSO
ENERO 2021

Agradecimientos

Quiero comenzar dando las gracias al profesor Jesús Juyumaya, por aceptarme de oyente en el 2017, en el que fue mi primer curso de Teoría de Nudos, también por dirigir mi trabajo de Licenciatura el año siguiente y motivarme a continuar con el Magíster. Sin duda alguna, sus clases, las numerosas reuniones que tuvimos y las discusiones por correo de diversos temas contribuyeron en mi formación matemática y en la línea de investigación que decidí seguir. Por esto y mucho más: Gracias profesor.

También agradecer a Marcelo Flores y Francesca Aicardi, por formar parte de la comisión examinadora y por la lectura del presente trabajo, sus observaciones y comentarios permitieron enriquecerlo y mejorarlo.

Al cuerpo académico y docente del Instituto de Matemática de la Universidad de Valparaíso, en particular a Rodrigo Castro, Milton Espinoza, Raul Fierro, Marcelo Flores, Daniel Jiménez, Amalia Pizarro y Andrea Vera, con quienes no solo tuve clases, sino que también pude conversar y discutir sobre diversos temas, siempre de forma amena, cercana y con un (infaltable) café. Muchas gracias por mostrarme un mundo nuevo, en el que hay confianza y empatía con los alumnos y alumnas, en el que se puede ser todo lo riguroso que nuestra disciplina exige, pero sin perder partes esenciales de ser humano.

Así también agradecer a mis compañeros de Magíster, ya que sin ellos, estos dos años habrían sido mucho menos entretenidos y fructíferos. Por eso gracias Luis, Juan y Victor, por las ventanas en la "office", las sesiones de estudio e incluso los tiempos muertos que conversamos sobre banalidades.

A mi familia, por el inconmensurable apoyo que me han brindado no solo durante todos mis años de estudios sino en mi vida. En especial quiero agradecer a mis padres por enseñarme a ser una persona responsable y, en el fondo, buena. En particular a mi madre y mi hermano por toda la paciencia que me han tenido (y que me tendrán que seguir teniendo), por esos té y cafés a altas horas de la noche y por dejarme dormir algunos minutos más, que muchas veces se convirtieron en horas (todo por mi salud mental) o simplemente por preguntarme cómo estaba.

A Fran, Fer y Dani mis grandes amigas. A Bastián e Ignacio por lo bueno, lo malo y lo que vendrá. Especial agradecimiento a Fran e Ignacio por estos últimos meses de estrés y convivencia. Gracias a todos.

A tantas otras personas que no por no estar aquí, les debo menos.

Índice general

1. Invariantes polinomiales	5
1.1. Receta de Jones	5
1.2. Receta de Kauffman	10
1.3. Preguntas abiertas	13
2. Tied Braid y Tied Links	14
2.1. Conjunto de Particiones	14
2.2. Monoide de Trenzas ligadas	17
2.3. Tied Links	19
2.3.1. Teorema de Alexander y Markov para tied links	21
3. Invariantes para Tied Links	24
3.1. Invariantes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{J}$	24
3.2. Invariante $\tilde{Y}$	28
3.2.1. Invariante $\tilde{\Delta}$	31
3.2.2. Invariante $\tilde{\Theta}$	33
3.2.3. Invariante $\tilde{\Omega}$	36
3.3. Preguntas abiertas	36
4. Invariante de tipo Kauffman para tied link	37
4.1. Previos	37
4.2. Invariante de tipo Kauffman	39
4.3. Preguntas abiertas y trabajo futuro	45
A. Álgebras de Nudos	46
A.1. Álgebra de Hecke	46
A.1.1. Álgebra de Temperley-Lieb	46

A.2. Álgebra de Yokonuma-Hecke	47
A.3. bt-Álgebra	48
A.3.1. bt-Álgebra con dos parámetros	48
A.4. t-BMW Álgebra	49

Introducción

Conservando la tradición de quienes trabajan en Teoría de Nudos en la Universidad de Valparaíso, Chile, es que la presente tesis usará frecuentemente algunas expresiones en inglés en lugar de su traducción al español, por ejemplo:

1. Links en lugar de enlaces,
2. Ties o tied en lugar de liga o ligados,
3. Writhe en lugar de torsión,
4. Curl en lugar de rizo,
5. Set partition en lugar de conjunto de particiones.

La teoría de nudos, es una rama de la topología de bajas dimensiones, en la que convergen resultados y herramientas de varias otras áreas de la matemática. Se desarrolló principalmente a lo largo del siglo XX y actualmente es un activo campo de investigación, tanto en matemáticas puras como en sus aplicaciones.

El principal problema, actualmente abierto, es la clasificación de nudos y links en clases de equivalencias dadas por la relación de isotopía ambiente en $\mathbb{R}^3$. Una herramienta que ayuda en tal clasificación son las invariantes de nudos y links. Esta tesis tiene como principal foco ciertas invariantes que son de tipo polinomial.

Para el desarrollo de la tesis se supone un mínimo de conocimientos de la teoría de nudos y links, por lo que resultados como los teoremas clásicos de Reidemeister, Alexander y Markov, entre otros, se usarán con naturalidad en la tesis. Los teoremas clásicos pueden consultarse en [18, 19, 21].

Si bien Alexander presentó la primera invariante polinomial en 1923, fue hasta 1985 que Jones revolucionó el área con su polinomio homónimo, resultante de combinar de modo eficaz el teorema de Alexander con el de Markov. Esta combinación da lugar

a un método para construir invariantes (polinomiales) de nudos y links, la cual más adelante se llamará la “receta de Jones”. El polinomio de Jones impulso la definición de varias invariantes polinomiales de Nudos, siendo las más famosas el polinomio de Homflypt y el polinomio de Kauffman.

En líneas generales esta tesis se puede dividir en dos partes: Una recopila las principales invariantes polinomiales de la teoría de Nudos y la otra recopila invariantes polinomiales para tied link. El concepto de tied link fue introducido por Aicardi y Juyumaya en [2], y puede ser pensado como una generalización de la teoría de Nudos, que resulta ser útil para entender links con más de una componente.

A continuación pasaré a explicar brevemente los contenidos de cada capítulo.

En el Capítulo 1 se realizará una revisión de los avances más importantes en esta área con el fin de ilustrar tanto la receta de Jones como el método de Kauffman para construir invariantes polinomiales. La receta de Jones se sirve de un álgebra para construir invariantes para links orientados, en cambio el método de Kauffman construye una invariante de isotopía regular para links no orientados y luego normaliza esta invariante utilizando la orientación del Link. En particular, en este capítulo se revisan las invariantes de Jones, Homflypt, Alexander y Kauffman, así como algunas de las propiedades y construcciones de estas invariantes.

En el Capítulo 2 se introducirán los conceptos fundamentales de la teoría de tied links, esto es, los conceptos de: monoide de particiones, tied link, trenzas ligadas, entre otros. También se explicará la analogía de estos conceptos con su contraparte en la teoría de links clásicos. Como mencionamos antes los tied links fueron introducidos por Aicardi y Juyumaya en [2] y puede pensarse como una generalización no trivial de la teoría clásica de nudos: un tied link es un link clásico cuyas componentes pueden estar ligadas (o conectadas) por objetos, no topológicos, denominados ties. Finalmente, se presentan los teoremas de Alexander y Markov que relacionan los tied links con las trenzas ligadas.

En el Capítulo 3 se realiza una revisión de las invariantes polinomiales para tied links construidas a la fecha, sus construcciones y cómo se relacionan entre sí. Además, en este capítulo se realizan cálculos explícitos sobre un tied link en particular, de forma que puedan compararse las distintas invariantes sobre un ejemplo concreto, este será llamado ejemplo transversal y es el siguiente:

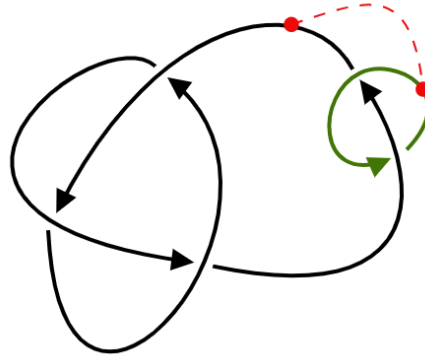


Figura 1: Ejemplo transversal

Este mismo ejemplo se utilizará para comparar la invariante construida en el siguiente capítulo con las ya conocidas. En particular, en este capítulo se revisan los trabajos [3, 2, 4, 6] de Aicardi y Juyumaya sobre invariantes para tied links.

En el Capítulo 4 se presenta un resultado de la tesis, el cual fue obtenido de modo original por el autor. Este resultado es una invariante polinomial para tied links, denotada por $\mathcal{H}$ y construida mediante la receta de Kauffman, es decir, se construye primeramente una invariante de isotopía regular para tied links, se prueba su existencia y se normaliza (utilizando el teorema de Kauffman) para obtener una invariante, N , de isotopía para tied links. La demostración de la existencia de $\mathcal{H}$ sigue la demostración de [19, Teorema 15.2]. Así, es necesario introducir los conceptos de diagramas ascendentes para luego introducir diagramas ascendentes para tied links, los cuales no son más que diagramas de componentes triviales, algunas de las cuales pueden estar ligadas por ties. También en este capítulo se muestra que la invariante N es equivalente a la invariante $\tilde{\Theta}$, ver 3.9, así como ver [10].

Finalmente, se incluye un Apéndice, en el cual se definen las álgebras de nudos que permiten construir invariantes polinomiales tanto sobre links clásicos como tied links.

El desarrollo de la presente tesis de magíster estuvo financiado por el proyecto FONDECYT Regular 1180036.

En la presente tesis se usarán las siguientes notaciones:

$\mathcal{L}$	Conjunto de links
$\tilde{\mathcal{L}}$	Conjunto de tied links
$\tilde{\mathcal{L}}^*$	Conjunto de tied links con todas sus componentes ligadas
$w(L)$	Writhe del link L
B_n	Grupo de n -trenzas
P_n	Monoide de particiones de n
TB_n	Monoide de n -trenzas ligadas
n	Conjunto de los primeros n naturales: $\{1, 2, \dots, n\}$
$\sqcup$	Unión disjunta
$\tilde{\sqcup}$	Unión disjunta y conexión mediante un tie

Finalmente, abajo se recuerdan las tripleteas de Conway y Kauffman, que relacionan tres diagramas idénticos excepto en cruce, donde difieren según se indica dentro del círculo punteado:

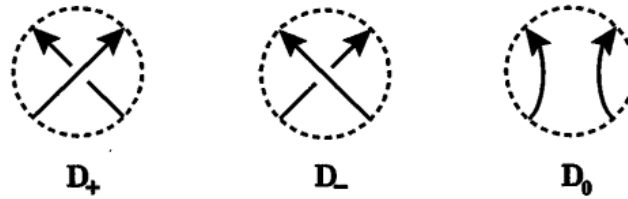


Figura 2: Tripletea de Conway

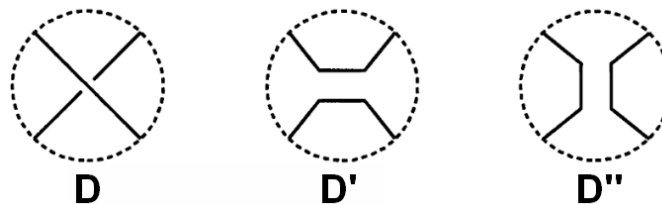


Figura 3: Tripletea de Kauffman

Capítulo 1

Invariantes polinomiales

En el presente capítulo se hace un breve resumen de la teoría de invariantes polinomiales para links. En particular, sobre dos métodos utilizados para fabricar invariantes: uno debido a V. Jones y el otro debido a L. Kauffman.

1.1. Receta de Jones

El polinomio de Jones fue definido por Vaughan Jones en 1984 utilizando como herramientas: una representación del grupo de trenzas (B_n) sobre el álgebra de Temperley-Lieb (TL_n) y la traza de Markov sobre esta álgebra, para detalles ver [13]. De modo un poco más preciso, este polinomio es un invariante de links orientados, que asocia a cada $L \in \mathcal{L}$ un polinomio de Laurent en $\mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$. En su forma original, está definido como sigue:

$$V_L(t) = \left(t^{1/2} - \frac{1}{t^{1/2}} \right)^{n-1} \tau(r(\alpha)), \quad (1.1)$$

donde α es una n -trenza cuya clausura es L , τ es la traza de Markov Ocneanu sobre el álgebra de Temperley-Lieb TL_n y r es la representación de B_n sobre TL_n .

El polinomio de Laurent $V_L(t)$ es conocido como el polinomio de Jones. Este polinomio puede definirse también mediante relaciones skein. Más precisamente, si (L_+, L_-, L_0) es un triple de Conway, entonces el polinomio de Jones queda completamente determinado por las siguientes reglas:

1. $V_{\bigcirc}(t) = 1$,

$$2. \ t^{-1} V_{L_+}(t) - t V_{L_-}(t) = \left(t^{1/2} - \frac{1}{t^{1/2}} \right) V_{L_0}(t).$$

Antes de introducir algunas de sus principales propiedades se recordarán ciertas operaciones sobre los nudos y links.

Definición 1.1. Sean K y K' dos links orientados, entonces se define:

1. $K \# K'$ como la suma conexas de K, K' , es decir, como el link obtenido suprimiendo un intervalo en una componente de cada uno y pegándolos a lo largo de este intervalo de manera que las orientaciones coincidan,
2. $-K$ como el inverso de K , es decir, el mismo K pero con la orientación de cada componente invertida,
3. K^* como el reflejado de K , es decir, la imagen de K al reflejarlo respecto a un plano que no lo interseque.

Para ejemplificar las definiciones anteriores se incluyen los siguientes ejemplos:

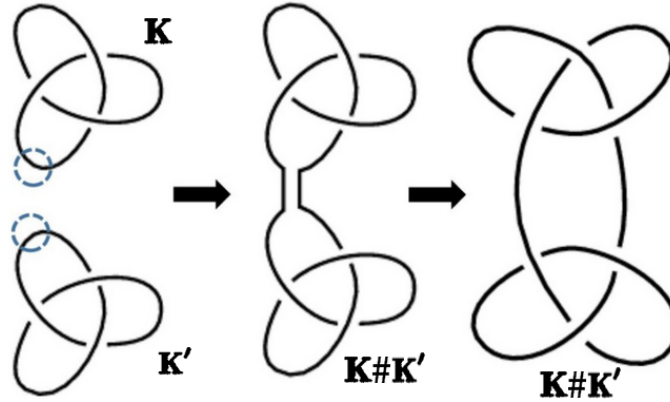


Figura 1.1: Suma conexas de K y K' .

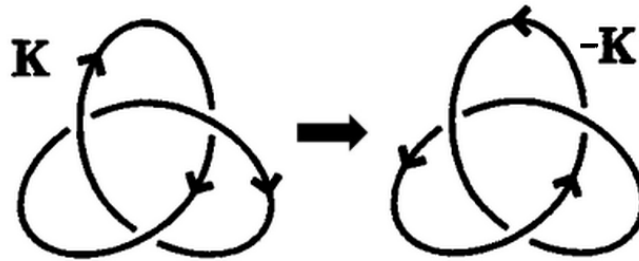
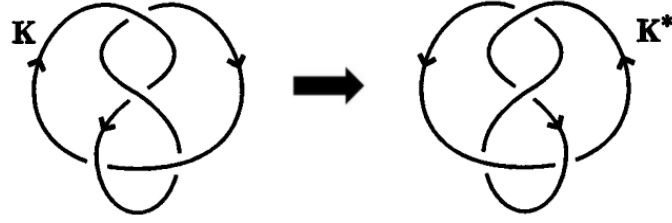


Figura 1.2: K y su inverso $-K$.

Figura 1.3: K y su reflejado K^* .

En la proposición que sigue se presentan las principales propiedades del polinomio de Jones.

En lo sucesivo $\bigcirc^c$ denotará el link trivial de c componentes. Es decir:



Proposición 1.1. Sean L , L_1 y L_2 links orientados. Tenemos:

1. $V_{\bigcirc^c}(t) = (-1)^{c-1} \left(t^{1/2} - \frac{1}{t^{1/2}} \right)^{c-1}$,
2. $V_{L \sqcup \bigcirc^c}(t) = (-1)^c \left(t^{1/2} - \frac{1}{t^{1/2}} \right)^c V_L(t)$,
3. $V_{L_1 \sharp L_2}(t) = V_{L_1}(t) V_{L_2}(t)$,
4. $V_{L_1 \sqcup L_2}(t) = - \left(t^{1/2} - \frac{1}{t^{1/2}} \right) V_{L_1}(t) V_{L_2}(t)$,
5. $V_{-L}(t) = V_L(t)$,
6. $V_{L^*}(t) = V_L(t^{-1})$.

La prueba de la proposición anterior puede encontrarse en [21].

Observación 1.1. El primer invariante polinomial fue el polinomio de Alexander [7], este puede ser construido de múltiples maneras, ver por ejemplo [15, 18, 7]. También, este polinomio queda completamente determinado por las siguientes reglas:

1. $\nabla(\bigcirc) = 1$,
2. $\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z \nabla(L_0)$.

La construcción de Jones puede entenderse a partir de los teoremas de Alexander y de Markov que nos aseguran una biyección entre $B_\infty / \sim_M$ y $\mathcal{L} / \sim$, donde $\sim_M$ y $\sim$ son, respectivamente, las relaciones de equivalencia dadas por los movimientos de Markov y la de isotopía ambiente, y $B_\infty := \bigcup_{n \leq 1} B_n$ es el conjunto de trenzas de cualquier número de hebras. Luego, construir invariantes para links es equivalente a encontrar un mapeo $\phi : B_\infty \rightarrow X$ con X conjunto, tal que ϕ respete los movimientos de Markov. Ahora, el mismo Jones define, en 1987, el polinomio de Homflypt mediante una representación del grupo de trenzas sobre el álgebra de Hecke. Esta construcción da lugar a un método para construir invariantes de nudos, la cual es referida como la *receta de Jones*.

Al igual que en la construcción original del polinomio de Jones, se utilizan como herramientas una representación del grupo de trenzas, esta vez en el álgebra de Hecke, y una traza sobre esta, la cual es conocida como la traza de Ocneanu.

La definición dada por Jones del polinomio de Homflypt del link orientado L es un polinomio de Laurent en las variables q y λ , denotado por $X_L(q, \lambda)$ y dado por

$$X_L(q, \lambda) = \left(-\frac{1 - \lambda q}{\sqrt{\lambda}(1 - q)} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^e \text{tr}(\pi(\alpha)), \quad (1.2)$$

donde α es una n -trenza cuya clausura es L , e es el exponente de α , π es la representación natural del grupo de trenzas B_n en el álgebra de Hecke $H_n(u)$ y tr es la traza de Markov sobre $H_n(u)$. Para más detalles de la construcción del polinomio de Homflypt debida a Jones, ver [14].

También en [14] se demuestra que el polinomio de Homflypt puede calcularse mediante una condición inicial y una relación skein. Es decir, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1.1. *Para cada link orientado L existe un polinomio de Laurent $P_L(t, x)$ en las variables t, x tales que $t = \sqrt{\lambda q}$ y $x = \sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}}$, entonces $P_L(t, x) = X_L(q, \lambda)$. Más aún, $P_L(t, x)$ queda únicamente definido por su valor en el no-nudo, $P_\circ(t, x) = 1$, y por la relación skein:*

$$t^{-1} P_{L_+}(t, x) - t P_{L_-}(t, x) = x P_{L_0}(t, x). \quad (1.3)$$

Algunas propiedades relevantes del polinomio de Homflypt están en la siguiente proposición.

Proposición 1.2. *Sean L, L_1 y L_2 tres links orientados, entonces:*

1. $P_{\odot^c}(t, x) = \left(\frac{t-t^{-1}}{x} \right)^{c-1},$
2. $P_{L_1 \# L_2}(t, x) = P_{L_1}(t, x) P_{L_2}(t, x),$
3. $P_{L_1 \sqcup L_2}(t, x) = - \left(\frac{t-t^{-1}}{x} \right) P_{L_1}(t, x) P_{L_2}(t, x),$
4. $P_{-L}(t, x) = P_L(t, x),$
5. $P_{L*}(t, x) = P_L(t^{-1}, -x).$

Como puede verse, varias propiedades del polinomio de Homflypt son idénticas a las que posee el polinomio de Jones, esto se debe a que tanto el polinomio de Jones como el de Alexander, pueden obtenerse como especializaciones del polinomio Homflypt. De modo preciso, $V_L(t)$ y $\Delta_L(t)$ se realizan mediante las siguientes especializaciones.

$$\begin{aligned} V_L(t) &= P_L(t^{-1}, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}), \\ \Delta_L(t) &= P_L(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Observación 1.2. *El nombre Homflypt se debe a los matemáticos que contribuyeron en el descubrimiento de este polinomio, como se puede leer en la nota del editor en [12], en un periodo de pocos días, se recibieron cuatro investigaciones con igual resultado: el descubrimiento y propiedades de un nuevo polinomio invariante de nudos y links. Cada uno de estos trabajos con variaciones sustanciales en el método utilizado para llegar a él. Estos trabajos fueron: "A polynomial invariant of knots and links" de Jim Hoste, "A polynomial invariant for knots: A combinatorial and an algebraic approach" de A. Ocneanu, "Topological invariants of knots and links" de W. B. R. Lickorish y Kenneth C. Millett y "A new invariant for knots and links" de Peter Freyd y David Yetter. Las iniciales "p" de Przytycki y "t" de Traczyk, por su trabajo "Invariants of links of Conway type", se agregaron posteriormente debido a que en 1985 aún eran tiempos de Guerra Fría, por esto su trabajo tardó en ser conocido.*

Observación 1.3. *Lickorish y Millett prueban la existencia y unicidad del polinomio de Homflypt usando inducción sobre el número de cruces, es decir, para cada conjunto de links con a lo más n cruces prueban que existe un único polinomio que cumple la*

relación skein (1.3), que vale 1 en el no nudo y que es invariante por movimientos de Reidemeister que no involucren más de n cruces. Para lo anterior, se introduce la noción de diagramas ascendentes de links para probar que se puede extender inductivamente a links con $n + 1$ cruces y que esta extensión cumple con las propiedades antes mencionadas.

Observación 1.4. Una tercera notación utilizada para el polinomio Homflypt es la dada por el cambio de variable $l = \frac{i}{t}$ y $m = ix$ con $i^2 = -1$. En esta notación, la relación skein asociada al polinomio Homflypt queda como:

$$l P_{L_+}(l, m) + l^{-1} P_{L_-}(l, m) = m P_{L_0}(l, m). \quad (1.5)$$

Además, utilizando las variables de Jones, la misma expresión puede reescribirse como:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda q}} P_{L_+}(\lambda, q) - \sqrt{\lambda q} P_{L_-}(\lambda, q) = \left(\sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \right) P_{L_0}(\lambda, q). \quad (1.6)$$

1.2. Receta de Kauffman

Otro método para construir invariantes de nudos es debido a Louis Kauffman y es el método que se usará en la presente tesis, para construir la invariante $\mathcal{H}$ anunciada en la introducción.

El método de Kauffman fue introducido en [16] y consiste en dos pasos: primero se define una invariante de isotopía regular, es decir, una invariante que respeta los movimientos de Reidemeister 2 y 3. Luego, esta invariante se normaliza utilizando el writhe, obteniendo así una invariante de links orientados. Para detalles de la normalización, ver [16, Teorema 2.6].

A continuación se presenta la construcción del polinomio de Jones mediante el método de Kauffman. En esta situación la invariante de isotopía regular es el *polinomio bracket*.

Teorema 1.2. Sea D un diagrama de link no orientado, entonces existe un único polinomio de Laurent en la variable A , llamado polinomio bracket y denotado $\langle D \rangle(A)$, que satisface los siguientes axiomas:

1. $\langle D \rangle(A)$ es invariante de isotopía regular,

2. $\langle \bigcirc \rangle(A) = 1,$
3. $\langle D_1 \sqcup D_2 \rangle(A) = -(A^2 + A^{-2})\langle D_1 \rangle(A)\langle D_2 \rangle(A),$
4. $\langle D \rangle(A) = A\langle D' \rangle(A) + A^{-1}\langle D'' \rangle(A).$

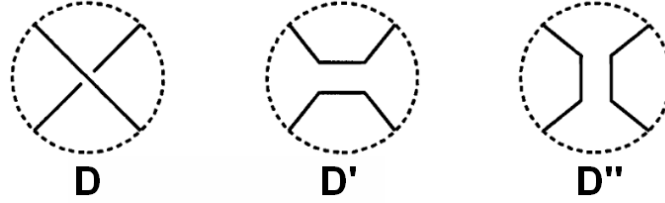


Figura 1.4: Tripleta de Kauffman

Luego, aplicando el principio de Kauffman y utilizando el writhe del diagrama de link, $w(D)$, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3. *Si D es un diagrama orientado de link y $\langle D \rangle(A)$ el polinomio bracket de Kauffman entonces*

$$\tilde{P}_D(A) = (-A^{-3})^{-w(D)} \langle D \rangle(A) \quad (1.7)$$

define una invariante de links orientados.

Observación 1.5. *Es importante notar que $\tilde{P}_L(t^{-1/4}) = V_L(t)$, es decir el método de Kauffman da otra manera de construir el polinomio de Jones.*

Definición 1.2. *Se definen los curl positivos y negativos, denotados como c^+ y c^- respectivamente como los correspondientes a los siguientes diagramas:*



Figura 1.5: Diagramas de curls

La construcción del polinomio $\tilde{P}_D(A)$ se generaliza a un polinomio en dos variable, obteniendo así el polinomio de Kauffman, esta se construye como indican los siguientes teoremas:

Teorema 1.4. *Sea D un diagrama de link no orientado, entonces existe un único polinomio de Laurent en dos variables $\Lambda_D(a, x)$ que satisface los siguientes axiomas:*

1. $\Lambda_D(a, x)$ es invariante de isotopía regular,
2. $\Lambda_{\bigcirc}(a, x) = 1$,
3. $\Lambda_{c^+}(a, x) = a \Lambda_{\sim}(a, x)$ y $\Lambda_{c^-}(a, x) = a^{-1} \Lambda_{\sim}(a, x)$ con c^+, c^- curl positivo y negativo respectivamente, y $\sim$ el resultado de aplicar al respectivo curl (c^+, c^-) el movimiento $R1$ de Reidemeister,
4. $\Lambda_{D_+}(a, x) + \Lambda_{D_-}(a, x) = x(\Lambda_{D'}(a, x) + \Lambda_{D''}(a, x))$.

Así, nuevamente mediante su método, Kauffman construye una invariante polinomial, en dos variables, conocida como el polinomio de Kauffman.

Teorema 1.5.

$$F_D(a, x) = a^{-w(D)} \Lambda_D(a, x). \quad (1.8)$$

Este puede ser especializado al polinomio de Jones de la siguiente forma

$$F_L(-t^{-3/4}, t^{1/4} + t^{-1/4}) = V_L(t).$$

Así como a la invariante construida en 1.3 mediante $F_L(-A^3, A + A^{-1}) = \tilde{P}_L(A)$.

Algunas propiedades del polinomio F están en la siguiente proposición.

Proposición 1.3. *Sean L, L_1 y L_2 links orientados, entonces*

1. $F_{L*}(a, x) = F_L(a^{-1}, x)$,
2. $F_{L_1 \# L_2}(a, x) = F_{L_1}(a, x) F_{L_2}(a, x)$,
3. $F_{L_1 \sqcup L_2}(a, x) = -l F_{L_1}(a, x) F_{L_2}(a, x)$ con $l = \frac{a+a^{-1}}{x} - 1$.

Kauffman [17] también construye el polinomio de Homflypt mediante su receta. En efecto, él demuestra los siguiente teoremas.

Teorema 1.6. *Existe una invariante polinomial $H_L(a, z)$ que satisface los siguientes axiomas:*

1. $H_L(a, z)$ es invariante de isotopía regular,

2. $H_{\bigcirc}(a, z) = 1$,
3. $H_{L_+}(a, z) - H_{L_-}(a, z) = zH_{L'}(a, z)$ con L' como en la figura 1,
4. $H_{c^+}(a, z) = aH_{\sim}(a, z)$ y $H_{c^-}(a, z) = a^{-1}H_{\sim}(a, z)$.

Teorema 1.7. *Entonces $P_L(a, z) = a^{-w(L)}H_L(a, z)$.*

Dado que el polinomio Homflypt puede realizarse usando la receta de Kauffman, una pregunta natural es ¿puede definirse el polinomio de Kauffman mediante la receta de Jones? La respuesta a esta pregunta es afirmativa y se realiza cambiando el álgebra de Hecke por la BMW-álgebra, para detalles ver [9].

1.3. Preguntas abiertas

La construcción del polinomio de Alexander mediante las recetas de Jones y Kauffman es aún un problema abierto: Existe una construcción del polinomio de Alexander mediante la receta de Jones, usando el álgebra Rook, para detalles ver [8], sin embargo, en mi opinión dicha construcción no es totalmente satisfactoria.

Una especialización del polinomio de Kauffman es el Q -polinomio, este no puede obtenerse como especialización del polinomio Homflypt, sin embargo no se sabe si es posible construirlo mediante la receta de Jones.

Conjetura 1.1. *Es posible construir el Q -polinomio mediante la receta de Jones utilizando algún cociente de la BMW-álgebra.*

La anterior conjetura se basa en que, al igual que el polinomio de Jones es una especialización del polinomio Homflypt, el Q -polinomio es una especialización del polinomio de Kauffman. Además, dado que el álgebra de Temperley-Lieb es un cociente del álgebra de Hecke, podría existir cierta álgebra cociente de la BMW-álgebra que permita construir el Q -polinomio mediante la receta de Jones.

Capítulo 2

Tied Braid y Tied Links

En el presente capítulo se introducirá el principal objeto de estudio de esta tesis: los Tied-Links, su relación con las Tied-Braid y con la teoría clásica de nudos y trenzas. Para lograr lo anterior se comenzará con las nociones básicas de particiones de conjuntos o *set partition* (en inglés).

2.1. Conjunto de Particiones

Definición 2.1. Para un conjunto A , una partición de A es un conjunto $I = \{I_1, \dots, I_k\}$ tal que $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^k I_i = A$. A los conjuntos $I_1, \dots, I_k$ se les llamará bloques de I .

Notación 2.1. Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $[n]$ el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y por P_n el conjunto de las particiones de $[n]$.

Observación 2.1. 1. El cardinal de P_n se denota b_n y se corresponde con el n -ésimo número de Bell [20]

2. P_n puede ser dotado de un orden parcial, $\leq$ definido como sigue: $I \leq J$ si y solo si cada bloque de I es una unión de bloques de J .

Los elementos de P_n pueden representarse mediante grafos lineales o ligas (ties) entre cuerdas, por ejemplo, a continuación tenemos primero una representación por un grafo lineal y luego una mediante ligas.

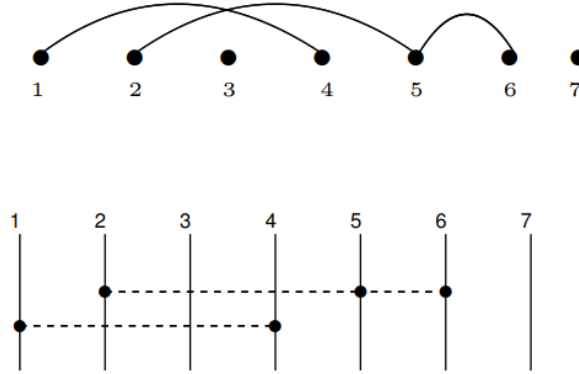


Figura 2.1: Representaciones de la partición $I = \{\{1, 4\}, \{2, 5, 6\}, \{3\}, \{7\}\}$

La anterior representación induce una forma natural de indexar los bloques como sigue: sean $I_1, \dots, I_k$ los bloques de I , entonces diremos que poseen una indexación estándar si $\min(I_j) < \min(I_{j+1})$ para todo j .

Es posible dotar al conjunto P_n de un producto $(*)$ que da una estructura de monoide conmutativo a P_n . Siendo más preciso, el producto $I * J$, entre las particiones $I, J \in P_n$, se define como la mínima partición de n que contiene, bajo $\leq$, a I y J . El elemento neutro bajo esta operación es la partición de los singleton, vale decir, $\{\{1\} \dots \{n\}\}$. Además vale la pena destacar que $I * J = J$ siempre que $I \leq J$.

Ejemplo 2.1. Considere $I = \{\{1, 4\}, \{2, 5, 6\}, \{3\}, \{7\}\}$ y $J = \{\{1, 4, 2, 5, 6\}, \{3, 7\}\}$, entonces $I * J = J$ pues $I \leq J$.

Ejemplo 2.2. Considere ahora $I = \{\{1, 4\}, \{2, 5, 6\}, \{3\}, \{7\}\}$ y $J = \{\{1, 4, 2\}, \{5, 6\}, \{3, 7\}\}$, entonces $I * J = \{\{1, 4, 2, 5, 6\}, \{3, 7\}\}$.

Definición 2.2. Para todo $1 \leq i < j \leq n$ con $i \neq j$, se define $\mu_{i,j} \in P_n$ como la partición de n cuyos único bloque que no es singleton es $\{i, j\}$.

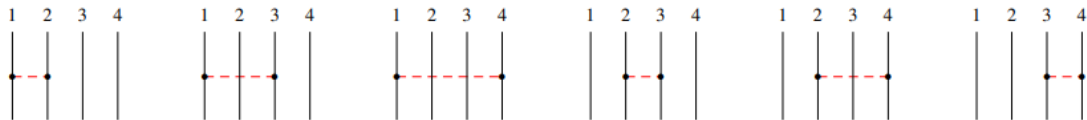


Figura 2.2: Generadores de P_4

Teorema 2.1. [11, Theorem 2] El monoide P_n puede ser presentado por los generadores $\mu_{i,j}$, $1 \leq i < j \leq n$ sujetos a las siguientes relaciones:

1. $\mu_{i,j}^2 = \mu_{i,j}$ para todo i, j .
2. $\mu_{i,j}\mu_{r,s} = \mu_{r,s}\mu_{i,j}$ para todo i, j, r, s .
3. $\mu_{i,j}\mu_{j,k} = \mu_{i,k}\mu_{i,j} = \mu_{i,k}\mu_{j,k}$ para todo $i < j < k$.

Definición 2.3. Se define P_∞ como el monoide obtenido por límite inductivo asociado a la familia $\{(P_n, \iota_n)\}$, donde ι_n es el monomorfismo entre P_n y P_{n+1} , $\iota_n : I \mapsto I \cup \{n+1\}$, es decir, ι_n toma $I \in P_n$ y le agrega el bloque $\{n+1\}$.

Recordemos que S_n , denota al grupo simétrico de n símbolos, es decir, el grupo formado por las permutaciones de n símbolos. Este grupo actúa, de forma natural, sobre el monoide P_n de la siguiente manera: Sea $I = \{I_1, \dots, I_k\} \in P_n$ y $s \in S_n$, entonces:

$$s(I) = \{s(I_1), \dots, s(I_k)\}. \quad (2.1)$$

La acción (1) se extiende naturalmente a una acción de B_n sobre P_n , donde B_n es el grupo de n -trenzas, cuya presentación (de Artin) es:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, & \forall |i-j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, & \forall 1 < i \leq n-2 \end{array} \right\rangle. \quad (2.2)$$

Siendo más explícito, la acción de B_n sobre P_n , viene del hecho que existe un epimorfismo natural $\pi : B_n \rightarrow S_n$ que mapea σ_i en $s_i = (i, i+1)$. En efecto, definamos $\pi_\alpha := \pi(\alpha)$. El epimorfismo π define una acción desde B_n en P_n , esto es, $\beta \in B_m$ actuando sobre $I \in P_n$ es $\pi_\beta(I)$, ver (2.1). Esta acción define un monoide sobre el producto cartesiano $P_n \times B_n$, donde la multiplicación queda definida por:

$$(I, \alpha)(J, \beta) = (I * \pi_\alpha(J), \alpha\beta). \quad (2.3)$$

Este monoide resulta ser un producto semidirecto de P_n con B_n y en consecuencia se denotará por $P_n \rtimes B_n$, para detalles ver [5]. No es difícil ver que tanto P_n como B_n pueden ser vistos como submonoides de este producto semidirecto: en efecto B_n y P_n se identifican naturalmente a los submonoides de $P_n \rtimes B_n$ formado por los pares $(1, \sigma)$ y por $(I, 1)$ respectivamente, donde 1 denota el neutro en la respectiva componente.

La descomposición $(I, \beta) = (I, 1)(1, \beta)$, junto con el Teorema 2.1 implica el siguiente lema:

Lema 2.1. *El monoide $P_n \rtimes B_n$ es generado por $(\mu_{i,i+1}, 1)$ y $(1, \sigma_j^{\pm 1})$, con $1 \leq i, j \leq n-1$.*

2.2. Monoide de Trenzas ligadas

En la presente sección se introducirá el monoide de trenzas ligadas.

Definición 2.4. *El monoide de trenzas ligadas, denotado TB_n , es el monoide generado por los generadores del grupo de trenzas $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, con sus respectivos inversos y los generadores $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$, llamados ties, tal que los σ_i satisfacen las relaciones del grupo de trenzas y junto a los η_i satisfacen las siguientes relaciones:*

1. $\eta_i \eta_j = \eta_j \eta_i$ para todo i, j ,
2. $\eta_i \sigma_i = \sigma_i \eta_i$ para todo i ,
3. $\eta_i \sigma_j = \sigma_j \eta_i$ para $|i - j| > 1$,
4. $\eta_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \eta_i$ para $|i - j| = 1$,
5. $\eta_i \sigma_j \sigma_i^{-1} = \sigma_j \sigma_i^{-1} \eta_i$ para $|i - j| = 1$,
6. $\eta_i \eta_j \sigma_i = \eta_j \sigma_i \eta_i = \sigma_i \eta_i \eta_j$ para $|i - j| = 1$,
7. $\eta_i \eta_i = \eta_i$ para todo i .

En término de diagramas, uno puede ver a los generadores como sigue:



Figura 2.3: Generadores σ_i y η_i respectivamente.

Así como los generadores, las relaciones también pueden entenderse en término de diagramas, por ejemplo:



Figura 2.4: Relaciones 4. y 5.

Definición 2.5. Se pueden definir los ties generalizados conectando las hebras i, j no necesariamente adyacentes, $\eta_{i,j}$ para $|i - j| > 1$, como sigue:

$$\eta_{i,j} := \sigma_i \cdots \sigma_{j-2} \eta_{j-i} \sigma_{j-2}^{-1} \cdots \sigma_i^{-1}. \quad (2.4)$$

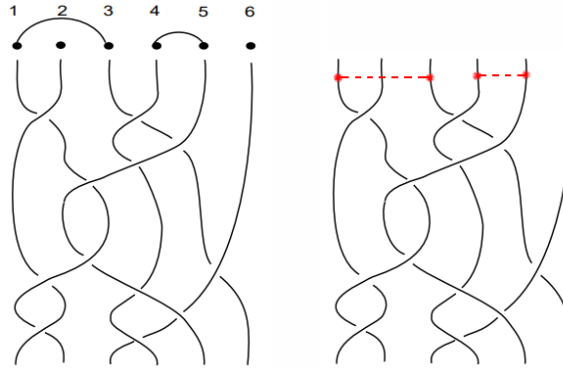
Un elemento fundamental que usaremos es el elemento η^n , que es definido como:

$$\eta^n := \eta_1 \cdots \eta_{n-1}. \quad (2.5)$$

Teorema 2.2. El monoide de trenzas ligadas TB_n es isomorfo a $P_n \rtimes B_n$.

La prueba del anterior teorema puede verse en [2] y se realiza mediante los mapeos $\sigma_i \mapsto (1, \sigma_i)$ y $\eta_i \mapsto \mu_{i,i+1}$.

Gracias al teorema anterior podemos pensar en las trenzas ligadas como pares ordenados $(I, \alpha) \in P_n \rtimes B_n$ y pueden ser visualizadas de dos formas distintas, a saber:

Figura 2.5: Trenza ligada en $P_6 \rtimes B_6$ a la izquierda y en TB_6 a la derecha

2.3. Tied Links

Los tied links fueron introducidos por Aicardi y Juyumaya en [2] como una generalización de los links. La construcción de estos puede verse desde un punto de vista algebraico o desde uno topológico, en esta sección se comenzará con el segundo punto de vista y luego se relacionará con las trenzas ligadas construidas en la sección anterior.

Definición 2.6. *Un tied links es un link en el cual algunas de sus componentes pueden estar conectadas por ties. Los ties entre las componentes se representan como resortes (o líneas segmentadas).*

Notación 2.2. *El conjunto de los tied links se denota por $\tilde{\mathcal{L}}$.*

Sea $\tilde{L} \in \tilde{\mathcal{L}}$, denotaremos por L el links obtenido desde $\tilde{L}$ olvidando los ties.

Definición 2.7. *Un diagrama de un tied link $\tilde{L}$ es la proyección de L en $\mathbb{R}^2$ y con ties entre las componentes de la proyección, según las que habían originalmente en $\tilde{L}$.*

Observación 2.2. *Los ties no son objetos topológicos, son artefactos que identifican componentes de link. Sin embargo ellos, tienen las siguientes propiedades "físicas":*

- *Desplazamiento: Sus puntos pueden moverse por las componentes de los links o por los arcos si hablamos de diagramas.*
- *Transparencia: Pueden atravesar arcos.*
- *Elasticidad: Pueden extenderse y acortarse a conveniencia.*

En la siguiente figura se ilustran las propiedades antes descritas

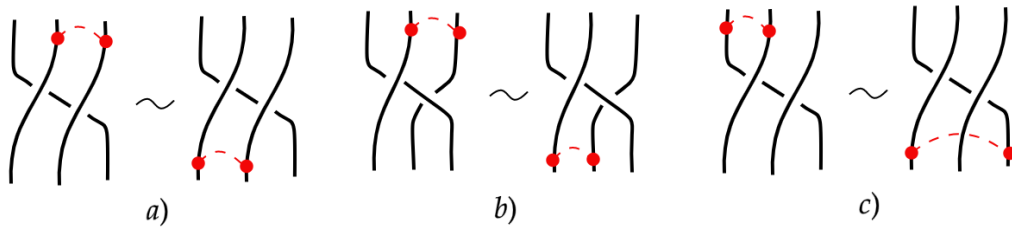


Figura 2.6: a)Desplazamiento b)Transparencia c)Elasticidad

Definición 2.8. *Dos tied links $\tilde{L}_1$ y $\tilde{L}_2$ se dirán tie-isotópicos si:*

1. L_1 y L_2 son isotópicos,
2. la isotopía mantiene los ties entre las componentes conectadas por ties.

A continuación se definen los movimientos de Reidemester para tied links con el fin de enunciar el teorema homónimo para estos.

Definición 2.9. La siguiente figura ilustra los movimientos de Reidemester para tied links. Se puede notar que son exactamente los mismos que para links clásicos, pero en estos deben respetarse las componentes conectadas por ties.

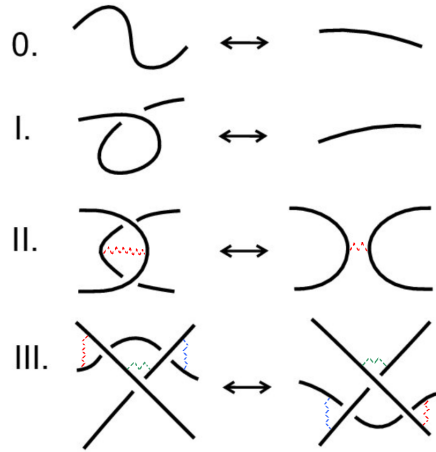


Figura 2.7: Movimientos de Reidemeister para tied links

El siguiente teorema es el teorema de Reidemeister para tied links:

Teorema 2.3. [2] Dos tied links $\widetilde{L}_1$ y $\widetilde{L}_2$ son tie-isotópicos si y solo si están conectados por una cantidad finita de movimientos de Reidemeister para tied links.

Observación 2.3. Dado que los ties pueden “moverse libremente” en el diagrama, podemos considerar los movimientos de Reidemeister siempre se realizan en una bola que deja fuera los ties.

Definición 2.10. Un tied se dice esencial si al eliminarse, las componentes que conectaba dejan de estar ligadas. Por lo tanto, un tied esencial siempre existe entre distintas componentes.

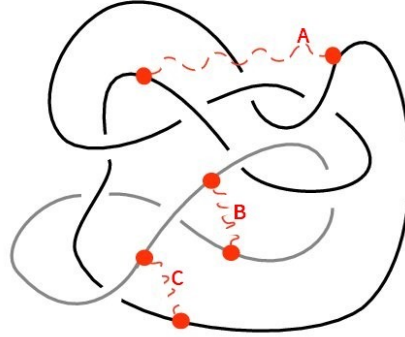


Figura 2.8: Los tied A y B son no esenciales pues ligan cada componente consigo misma, por otro lado el tied C sería esencial pues al quitarlo quedan las componentes negra y gris desligadas

2.3.1. Teorema de Alexander y Markov para tied links

En 1923 y 1936, Alexander y Markov, respectivamente, probaron teoremas homónimos que establecían una relación entre la Teoría de Nudos y el Álgebra, estos teoremas permiten construir una biyección entre $\mathcal{L}/\sim_R$ y $B_\infty/\sim_M$ donde $\sim_R$ y $\sim_M$ son, respectivamente, las relaciones de equivalencia dadas por los movimientos de Reidemeister y Markov. En la presente sección se presentan los resultados análogos para el contexto de Tied links, estos pueden encontrarse también en [2].

Definición 2.11. La clausura de una trenza ligada (I, α) denotada por $\widehat{(I, \alpha)}$ es el tied link (L, J) donde $L = \hat{\alpha}$ es la clausura usual de trenzas y J es la partición inducida por I .

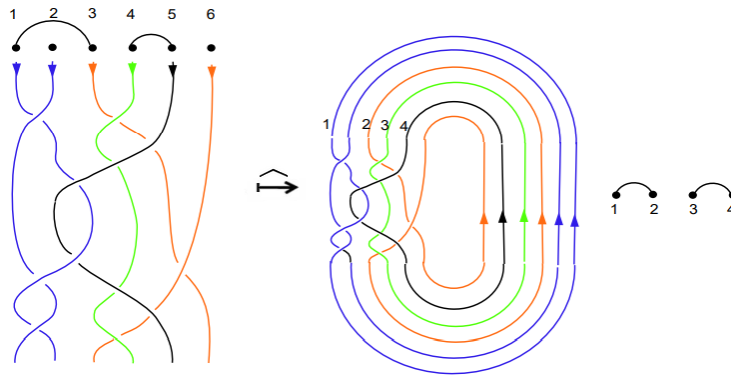


Figura 2.9: Clausura de una trenza ligada

A continuación se presenta el teorema de Alexander para tied links:

Teorema 2.4. *Todo tied link orientado puede obtenerse como clausura de una trenza ligada.*

Un tied link puede verse como la clausura de una trenza en TB_∞ o como un par ordenado $(L, I) \in \mathcal{L} \times P_n$, donde n es el número de componentes del link.

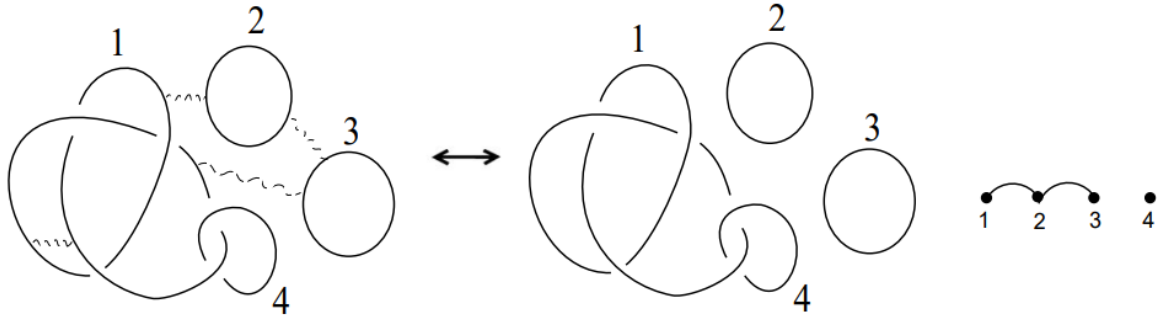
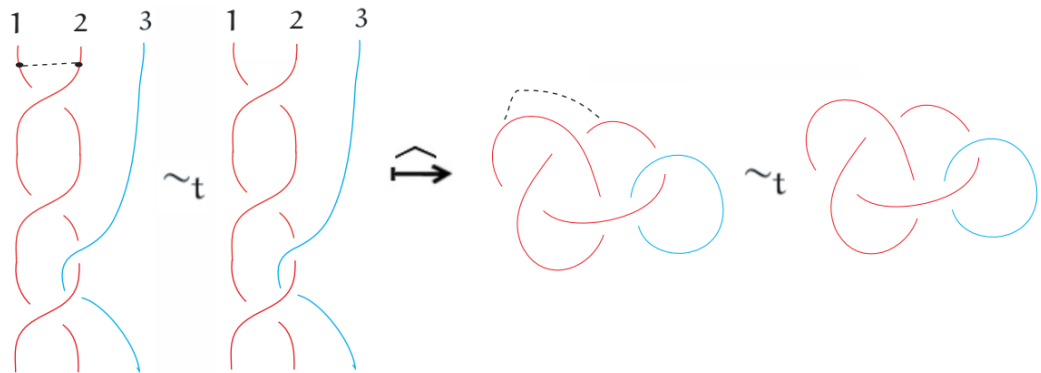


Figura 2.10: Dos formas de ver los tied links

Definición 2.12. *Dos trenzas ligadas en TB_∞ se dicen t -Markov equivalentes si una de ellas puede ser obtenida de la otra mediante una secuencia finita de los siguientes movimientos:*

1. *Conmutación:* Para todo $\alpha, \beta \in TB_n$, se puede intercambiar $\alpha\beta$ por $\beta\alpha$,
2. *Estabilización:* Para todo $\alpha \in TB_n$, se puede intercambiar α por $\alpha\sigma$ o $\alpha\sigma^{-1}$,
3. *t -Estabilización:* Para todo $\alpha = I\sigma \in TB_n$, se puede intercambiar α por $\alpha\mu_{i,j}$ cuando i, j pertenecen al mismo ciclo de $p(\sigma)$, donde p es la proyección de TB_n en S_n .

Notemos que los primeros dos movimientos se corresponden con los movimientos de Markov clásicos para trenzas, por otro lado el tercero, la t -estabilización, nos asegura que podemos agregar o quitar ties que, vistos en la clausura, son no esenciales, como muestra la siguiente figura:

Figura 2.11: Movimiento de t -estabilización

El siguiente es el teorema de Markov para trenzas ligadas.

Teorema 2.5. *Dos trenzas ligadas en TB_∞ definen tied links t -isotópicos si y solo si son t -Markov equivalentes.*

Para detalles del teorema anterior, ver [2].

Capítulo 3

Invariantes para Tied Links

En el presente capítulo se definirá los invariantes para tied links construidos a la fecha, como también sus propiedades y un bosquejo de su construcción. Además, a modo de ejemplo se procederá a calcularlas sobre un mismo tied link, el cual se llamará ejemplo transversal T . Para beneficio del lector, dicho cálculos se mostrarán a través de un árbol que explicita la descomposiciones por etapa del diagrama original.

Cabe advertir que mantendremos la notación de los parámetros, en las invariantes, usados en su definición original. En consecuencia, en cada sección los parámetros utilizados son independiente de los usados en las otras secciones.

3.1. Invariantes $\mathcal{L}$ y $\mathcal{J}$

En esta sección se muestra dos invariantes para tied links definidos en [4].

Teorema 3.1. *Existe una única función*

$$\mathcal{L} : \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}, x^{\pm 1}], \quad (3.1)$$

definida por los siguientes axiomas:

1. $\mathcal{L}(\bigcirc) = 1$,
2. $\mathcal{L}(D \sqcup \bigcirc) = x^{-1} \mathcal{L}(D)$,
3. $\mathcal{L}$ es invariante de isotopía regular para tied links,

4. $\mathcal{L}(c^+) = a \mathcal{L}(\sim)$ y $\mathcal{L}(c^-) = a^{-1} \mathcal{L}(\sim)$ con c^+, c^- curl positivo y negativo respectivamente,
5. $\mathcal{L}(\times) + \mathcal{L}(\times) = z(\mathcal{L}(\searrow) + \mathcal{L}(\swarrow))$.

Se recuerda que los curl positivo y negativo están definidos en la figura 1.5.

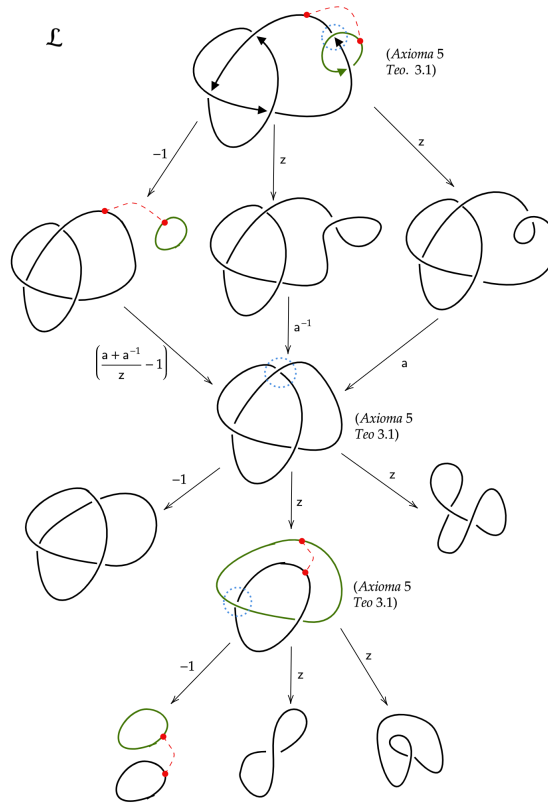
Observación 3.1. El análogo del Axioma 2 en presencia de un tie, puede calcularse a través de los Axiomas 4 y 5. Más precisamente se tiene,

$$\mathcal{L}(D \sqcup \bigcirc) = y \mathcal{L}(D), \quad (3.2)$$

con

$$y := \frac{a + a^{-1}}{z} - 1.$$

A continuación se muestra el cálculo de esta invariante sobre el ejemplo transversal T de la tesis



Por lo tanto tenemos que la invariante $\mathcal{L}$ sobre T es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(T) &= \left[1 - \frac{a + a^{-1}}{z} + za^{-1} + za \right] \left[-a + za^{-2} + z \left(1 - \frac{a + a^{-1}}{z} + za^{-1} + za \right) \right] \\
&= (2a^2 + 3 + a^{-2})z^{-1} - (3a + 3a^{-1} - a^{-3}) - (4 + 2a^{-2} - 2a^2)z + (3a^{-1} + 2a + a^{-3})z^2 \\
&\quad + (a^2 + 2 + a^{-2})z^3.
\end{aligned}$$

Teorema 3.2. *La función $\widetilde{\mathcal{L}}$ definida por*

$$\widetilde{\mathcal{L}}(D) := a^{-w(D)} \mathcal{L}(D), \quad (3.3)$$

es una invariante de isotopía ambiente para tied links orientados.

Observación 3.2. *La invariante $\mathcal{L}(a, z, x)$ generaliza la invariante (de isotopía regular) de Kauffman $\Lambda(a, z)$ definida en el teorema 2.3, en el siguiente sentido: $\mathcal{L}$ suministra una invariante sobre links clásicos al ser evaluada sobre tied links con todas sus componentes conectadas por ties. Ahora, $\mathcal{L}$ y Λ coinciden sobre nudos, pero $\mathcal{L}$ distingue links que no son distinguidos por Λ . Ver [4].*

Observación 3.3. *La invariante $\widetilde{\mathcal{L}}$ puede ser construida mediante la receta de Jones utilizando la t -BMW álgebra. De modo preciso, si L es un link obtenido por la clausura de $\alpha \in TB_n$, tenemos:*

$$\widetilde{\mathcal{L}}(L) = \left(\frac{1}{x} \right)^{n-1} a^{e(\alpha)} (\omega_n \circ \pi_n)(\alpha), \quad (3.4)$$

donde π_n es la representación natural de TB_n y ω_n es la traza de Markov sobre la t -BMW $_n$ algebra. Ver [4] para más detalles.

A continuación se define un polinomio de tipo Jones para tied links. Para esto es necesario introducir primero un polinomio bracket en el contexto de tied links.

Teorema 3.3. *Existe una única función*

$$\langle\langle \rangle\rangle : \widetilde{\mathfrak{L}} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, c^{\pm 1}], \quad (3.5)$$

definida por los siguientes axiomas:

1. $\langle\langle \bigcirc \rangle\rangle = 1$,
2. $\langle\langle D \sqcup \bigcirc \rangle\rangle = c \langle\langle D \rangle\rangle$,

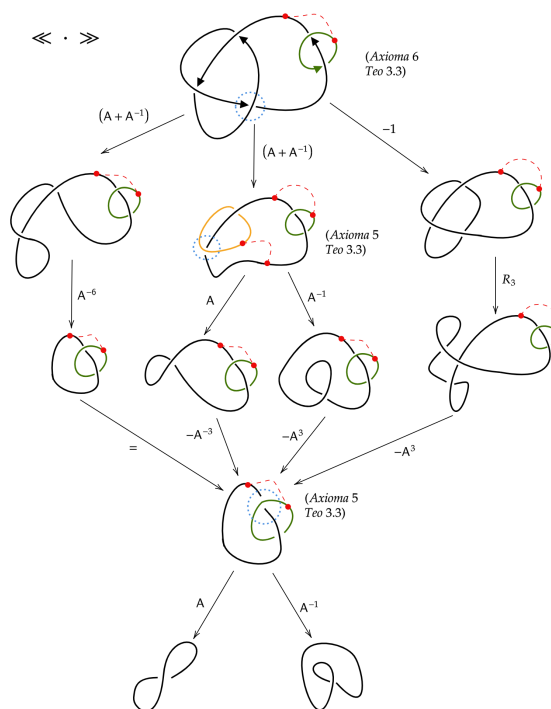
4. $\langle\langle \rangle\rangle$ es invariante de isotopía regular para tied links.

$$6. \langle\langle \times \rangle\rangle + \langle\langle \times \rangle\rangle = (A + A^{-1}) \left(\langle\langle \rangle \rangle + \langle\langle \rangle \rangle \right).$$

$$1. \quad \langle\langle c^+ \rangle\rangle = -A^3 \langle\langle \sim \rangle\rangle,$$

donde c^+, c^- son un curl positivo y negativo respectivamente.

Se ilustra el cálculo de esta invariante sobre el ejemplo transversal de la tesis



Entonces, la invariante $\langle\langle \ \rangle\rangle$ sobre el ejemplo T es:

$$\begin{aligned}\langle\langle T\rangle\rangle &= [A^{-6}(A+A^{-1})+(A+A^{-1})(-A^{-2}-A^2)+A^3] [-A^{-2}-A^2] \\ &= -[A^{-9}+A^{-7}-2A^{-1}-A-A^3].\end{aligned}$$

Observación 3.4. El polinomio $\langle\langle \rangle\rangle$ coincide con el polinomio bracket de Kauffman sobre links clásicos, vistos estos como tied links con todas sus componentes ligadas.

Definición 3.1. Se define la función $\widetilde{\mathcal{J}} : \widetilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}, c^{\pm 1}]$ por

$$\widetilde{\mathcal{J}}(D) := (-A)^{-3w(D)} \langle\langle D \rangle\rangle. \quad (3.6)$$

Teorema 3.4. El polinomio $\widetilde{\mathcal{J}}(D)$ es un invariante de isotopía ambiente para tied links.

Corolario 3.1. El polinomio $\widetilde{\mathcal{J}}(D)$, mediante el cambio de variable $A = t^{1/4}$, coincide con el polinomio de Jones cuando es evaluado sobre nudos. Así, $\widetilde{\mathcal{J}}(D)$ puede ser pensado como una generalización del polinomio de Jones para tied links.

Observación 3.5. Mediante los cambios de variables $a = -A^3$, $z = A + A^{-1}$, $x = c^{-1}$, la siguiente ecuación relaciona los polinomios $\mathcal{L}$ y $\widetilde{\mathcal{J}}(D)$:

$$\widetilde{\mathcal{J}}(D) = (-A)^{-3w(D)} \mathcal{L}(D). \quad (3.7)$$

3.2. Invariante $\widetilde{Y}$

En la presente sección se introduce la invariante $\widetilde{Y}$ definida en [6], como también tres de sus especializaciones.

El siguiente teorema define $\widetilde{Y}$ mediante la receta de Jones. Así, usaremos la traza de Markov ρ que posee la bt-álgebra en dos parametros $\mathcal{E}_n(u, v)$. Esta traza depende de dos parámetros, a y b . Para detalles ver Apéndice 1. Definamos ahora c como sigue

$$c := \frac{a + (1 - v)u^{-1}b + (u^{-1} - 1)a}{a} = \frac{a + b(1 - v)}{au}.$$

Teorema 3.5. La función $\widetilde{Y} : \widetilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{C}(u, v, a^1, \sqrt{c})$ define un invariante para tied links, donde

$$\widetilde{Y}(L) := \left(\frac{1}{a\sqrt{c}} \right)^{n-1} (\rho \circ \widetilde{\pi}_c)(\alpha), \quad (3.8)$$

con $\alpha \in TB_n$ tal que $L = \widehat{\alpha}$ y donde ρ es la traza de Markov sobre la bt-álgebra con dos parámetros, es decir, $\mathcal{E}_n(u, v)$ y $\widetilde{\pi}_c$ la representación de TB_n en $\mathcal{E}_n(u, v)$.

¹Recordar que este parámetro no está relacionado con su homónimo de la sección anterior.

La invariante $\tilde{Y}$ también puede ser definida mediante relaciones skein como muestra el siguiente teorema:

Teorema 3.6. *$\tilde{Y}$ queda únicamente definido por los siguientes axiomas:*

1. $\tilde{Y}(\bigcirc) = 1$,
2. $\tilde{Y}(L \sqcup \bigcirc) = \frac{1}{a\sqrt{c}} \tilde{Y}(L)$,
3. $\frac{1}{\sqrt{c}} \tilde{Y}(L_+) - \sqrt{c} \tilde{Y}(L_-) = \frac{v-1}{u} \tilde{Y}(L_\sim) + \frac{1-u^{-1}}{\sqrt{c}} \tilde{Y}(L_{+, \sim})$.

Observación 3.6. *De los Axiomas 1 y 2 se tiene que:*

$$\tilde{Y}(\bigcirc^n) = \left(\frac{1}{a\sqrt{c}} \right)^{n-1}. \quad (3.9)$$

Proposición 3.2. *Las relaciones definitorias de $\tilde{Y}$ implica las siguientes relaciones skein.*

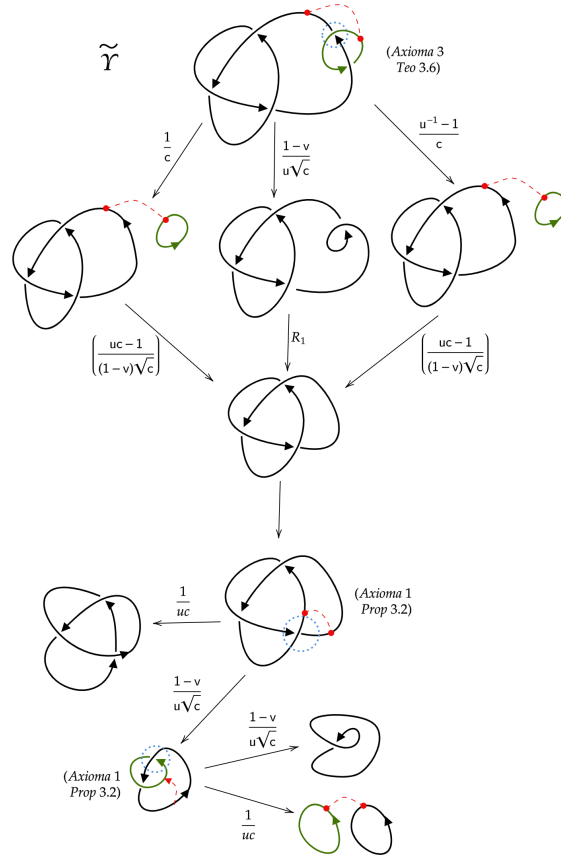
1. $\frac{1}{u\sqrt{c}} \tilde{Y}(L_{+, \sim}) - \sqrt{c} \tilde{Y}(L_{-, \sim}) = \frac{v-1}{u} \tilde{Y}(L_\sim)$,
2. $\frac{1}{\sqrt{c}} \tilde{Y}(L_+) = \sqrt{c} (\tilde{Y}(L_-) + (u-1) \tilde{Y}(L_{-, \sim})) + (v-1) \tilde{Y}(L_\sim)$,
3. $\sqrt{c} \tilde{Y}(L_-) = \frac{1}{\sqrt{c}} (\tilde{Y}(L_+) + \frac{1-u}{u} \tilde{Y}(L_{+, \sim})) + \frac{1-v}{u} \tilde{Y}(L_\sim)$.

Observe que la relación 4. de la Proposición anterior implica el siguiente corolario.

Corolario 3.2.

$$\tilde{Y}(\tilde{\bigcirc}^n) = \left(\frac{uc-1}{(1-v)\sqrt{c}} \right)^{n-1}. \quad (3.10)$$

El cálculo de esta invariante sobre el ejemplo transversal de la tesis se muestra a continuación



Por lo tanto tenemos que, sobre T , la invariante $\tilde{Y}$ vale:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(T) &= \left[\frac{1}{c} \cdot \frac{uc-1}{(1-v)\sqrt{c}} + \frac{1-v}{u\sqrt{c}} + \frac{1-u}{uc} \cdot \frac{uc-1}{(1-v)\sqrt{c}} \right] \left[\frac{1}{uc} + \frac{1-v}{u\sqrt{c}} \left[\frac{1}{uc} \cdot \frac{uc-1}{(1-v)\sqrt{c}} + \frac{1-v}{u\sqrt{c}} \right] \right] \\ &= \frac{(2u^2 + 3u(1-v)^2c^2 + (1-v)^4) - uc - 1}{u^3c^3\sqrt{c}(1-v)}. \end{aligned}$$

Observación 3.7. Para tied links en $\mathcal{L}^*$, es decir, tied links con todas sus componentes ligadas entre si, $\tilde{Y}$ queda completamente determinado por la regla 1 del teorema anterior y la primera regla de la proposición precedente. Además, al multiplicar esta última por $\sqrt{u}$ se observa que $\tilde{Y}$ coincide con el polinomio Homflypt, es decir, $\tilde{Y}(L) = P(L)$ para todo $L \in \mathcal{L}^*$. Lo anterior se logra mediante el cambio de variables

$$t = \sqrt{uc}, \quad x = \frac{v-1}{\sqrt{c}}.$$

Observación 3.8. Originalmente, la bt -álgebra se definió con un parámetro en [3, 22], la cual permitió construir la invariante $\tilde{\Delta}$. Posteriormente, motivado de la relación cuadrática del álgebra de Yokonuma-Hecke, fue considerada una relación cuadrática definitoria distinta a la original, ver [10]; la bt -álgebra con esta nueva relación cuadrática origina la invariante $\tilde{\Theta}$. Estas dos relaciones cuadráticas, a pesar, de no cambiar la bt -álgebra como objeto algebraico, ellas originan invariantes topológicamente no equivalentes. En efecto, $\tilde{\Delta}$ y $\tilde{\Theta}$ no son equivalentes, ver [1]. En [6], es definida la bt -álgebra con dos parámetros. Estos dos parámetros son usados en una relación cuadrática que, por especialización, reducen la bt -álgebra en dos parámetros a las bt -álgebras con un parámetro. Las distintas bt -álgebras se pueden revisar en Apéndice 1.

3.2.1. Invariante $\tilde{\Delta}$

En esta sección se presenta la invariante $\tilde{\Delta}$, introducida originalmente en [2] de dos formas distintas: en primer lugar, nombrada $\mathcal{F}$ y construida mediante relaciones skein y, en segundo lugar, nombrada $\tilde{\Delta}$ y construida a través de la receta de Jones. Finalmente se muestra la relación entre $\tilde{\Delta}$ y $\tilde{Y}$.

Teorema 3.7. Existe una función $\tilde{\Delta} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}(u, a, \sqrt{c})$, invariante de tied links orientados, únicamente definido por los siguientes axiomas:

1. $\tilde{\Delta}(\bigcirc) = 1$,
2. $\tilde{\Delta}(L \sqcup \bigcirc) = \frac{1}{a\sqrt{c}} \tilde{\Delta}(L)$,
3. $\frac{1}{\sqrt{c}} \tilde{\Delta}(L_+) - \sqrt{c} \tilde{\Delta}(L_-) = \frac{u-1}{u} \tilde{\Delta}(L_{\sim}) + \frac{1-u^{-1}}{\sqrt{c}} \tilde{\Delta}(L_{+, \sim})$.

Proposición 3.3. Las relaciones definitorias de Δ implica las siguientes relaciones skein.

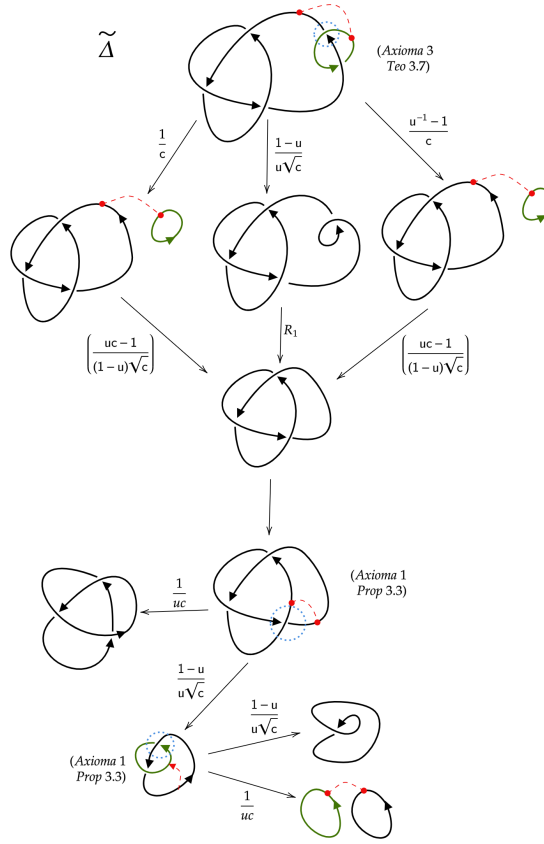
1. $\frac{1}{u\sqrt{c}} \tilde{\Delta}(L_{+, \sim}) - \sqrt{c} \tilde{\Delta}(L_{-, \sim}) = \frac{u-1}{u} \tilde{\Delta}(L_{\sim})$,
2. $\frac{1}{\sqrt{c}} \tilde{\Delta}(L_+) = \sqrt{c} (\tilde{\Delta}(L_-) + (u-1) \tilde{\Delta}(L_{-, \sim})) + (u-1) \tilde{\Delta}(L_{\sim})$,
3. $\sqrt{c} \tilde{\Delta}(L_-) = \frac{1}{\sqrt{c}} (\tilde{\Delta}(L_+) + \frac{1-u}{u} \tilde{\Delta}(L_{+, \sim})) + \frac{1-u}{u} \tilde{\Delta}(L_{\sim})$.

Observe que la relación 1. de la Proposición anterior implica el siguiente corolario:

Corolario 3.3.

$$\tilde{\Delta}(\tilde{\bigcirc}^n) = \left(\frac{uc-1}{(1-u)\sqrt{c}} \right)^{n-1}. \quad (3.11)$$

En la siguiente imagen se desarrolla el cálculo de esta invariante sobre el ejemplo transversal de la tesis



Así, la invariante $\tilde{\Delta}$ sobre T vale:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(T) &= \left[\frac{1}{c} \cdot \frac{uc-1}{(1-u)\sqrt{c}} + \frac{1-u}{u\sqrt{c}} + \frac{1-u}{uc} \cdot \frac{uc-1}{(1-u)\sqrt{c}} \right] \left[\frac{1}{uc} + \frac{1-u}{u\sqrt{c}} \left[\frac{1}{uc} \cdot \frac{uc-1}{(1-u)\sqrt{c}} + \frac{1-u}{u\sqrt{c}} \right] \right] \\ &= \frac{(u^4 - u^3 + 2u^2 - u + 1)c^2 - uc - 1}{u^3 c^3 \sqrt{c} (1-u)^2} \end{aligned}$$

Algunas propiedades de la invariante $\tilde{\Delta}$ son:

Proposición 3.4.

1. $\tilde{\Delta}(L_1 \# L_2) = \tilde{\Delta}(L_1) \tilde{\Delta}(L_2),$
2. $\tilde{\Delta}(L) = \tilde{\Delta}(-L),$

3. Sea $L \in \mathcal{L}^*$ y sea $L^\pm$ el link con todos los cruces cambiados, entonces

$$\tilde{\Delta}(L)(u, v) = \tilde{\Delta}(L^\pm)(u^{-1}, v^{-1}).$$

Se recuerda que $L_1 \# L_2$ y $-L$ están definidos en 1.1.

Observación 3.9. Para $L \in \mathcal{L}^*$, $\tilde{\Delta}(L)$ coincide con el polinomio de Homflypt. En efecto, $\tilde{\Delta}$ satisface la relación skein definitoria del polinomio Homflypt

$$l \tilde{\Delta}(L_+, \sim) + l^{-1} \tilde{\Delta}(L_-, \sim) + m \tilde{\Delta}(L_\sim) = 0, \quad (3.12)$$

donde $l = \frac{i}{\sqrt{cu}}$ y $m = i \left(\frac{1}{\sqrt{u}} - \sqrt{u} \right)$.

A continuación se presenta la construcción de $\tilde{\Delta}$ mediante la receta de Jones:

Sea L el tied link obtenido mediante la clausura de $\alpha \in TB_n$, se define $\tilde{\Delta}$ por

$$\tilde{\Delta}(L) := \bar{D}^{n-1}(\sqrt{L})^{e(\alpha)}(\rho_n \circ \varpi_n)(\alpha),$$

donde ρ_n es la traza de Markov sobre la bt -álgebra, ϖ_n es la representación natural de TB_n en $\mathcal{E}_n$, e es el exponente de α ,

$$L = \frac{a + z(uc - 1)}{ua}, \quad \bar{D} = -\frac{1 - Lu}{z(uc - 1)\sqrt{L}}.$$

Observación 3.10. La invariante Δ puede ser obtenida como especialización de Y mediante el siguiente cambio de variable:

$$\tilde{\Delta} := \tilde{Y}(u, u). \quad (3.13)$$

3.2.2. Invariante $\tilde{\Theta}$

En esta sección se presenta la invariante $\tilde{\Theta}$, introducida originalmente en [10]. Al igual que $\tilde{\Delta}$, la invariante $\tilde{\Theta}$ se puede definir a través de relaciones skein y mediante la receta de Jones.

Definición 3.2. La función $\tilde{\Theta} : TB_n \rightarrow \mathbb{C}(q, z, E)$ está definida por:

$$\tilde{\Theta}(\alpha) := \left(\frac{1}{z\sqrt{\lambda}} \right)^{n-1} (\sqrt{\lambda})^{e(\alpha)}(\rho \circ \bar{\pi})(\alpha), \quad (3.14)$$

donde ρ es la traza de Markov sobre la bt -álgebra $(\mathcal{E}_n(q))$, $\tilde{\pi}$ es la representación de $\mathbb{C}TB_n$ en $\mathcal{E}_n(q)$, e es el exponente de α y

$$\lambda = \frac{z - (q - q^{-1})E}{z}.$$

Teorema 3.8. *La función $\tilde{\Theta}$ es un invariante de isotopía ambiente para tied links orientados.*

Observación 3.11. *Haciendo $E = 1$ en $\tilde{\Theta}$ se obtiene el polinomio Homflypt.*

También, es posible definir $\tilde{\Theta}$ mediante relaciones skein como indica el siguiente teorema:

Teorema 3.9. *Existe una función $\tilde{\Theta} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}(v, a, \sqrt{c})$, invariante de tied links orientados, únicamente definido por los siguientes axiomas:*

1. $\tilde{\Theta}(\bigcirc) = 1$,
2. $\tilde{\Theta}(L \sqcup \bigcirc) = \frac{1}{a\sqrt{c}}\tilde{\Theta}(L)$,
3. $\frac{1}{\sqrt{c}}\tilde{\Theta}(L_+) - \sqrt{c}\tilde{\Theta}(L_-) = (v - 1)\tilde{\Theta}(L_{\sim})$.

Proposición 3.5. *Las relaciones definitorias de Θ implica las siguientes relaciones skein.*

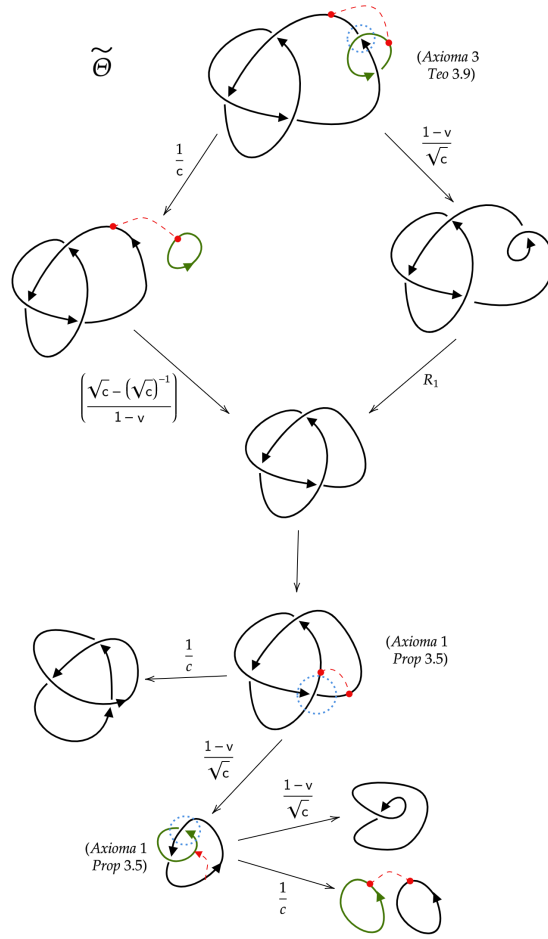
1. $\frac{1}{\sqrt{c}}\tilde{\Theta}(L_{+, \sim}) - \sqrt{c}\tilde{\Theta}(L_{-, \sim}) = (v - 1)\tilde{\Theta}(L_{\sim})$,
2. $\frac{1}{\sqrt{c}}\tilde{\Theta}(L_+) = \sqrt{c}\tilde{\Theta}(L_-) + (v - 1)\tilde{\Theta}(L_{\sim})$.

Observe que la relación 1. de la Proposición anterior implica el siguiente corolario.

Corolario 3.4.

$$\tilde{\Theta}(\tilde{\bigcirc}^n) = \left(\frac{c^{1/2} - c^{-1/2}}{1 - v} \right)^{n-1}. \quad (3.15)$$

A continuación se desarrolla el cálculo de esta invariante sobre el ejemplo transversal de la tesis



Luego, la invariante $\tilde{\Theta}$ sobre T vale:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(T) &= \left[\frac{1}{c} \cdot \frac{\sqrt{c} - (\sqrt{c})^{-1}}{(1-v)} + \frac{1-v}{\sqrt{c}} \right] \left[\frac{1}{c} + \frac{1-v}{\sqrt{c}} \left[\frac{1}{c} \cdot \frac{\sqrt{c} - (\sqrt{c})^{-1}}{(1-v)} + \frac{1-v}{\sqrt{c}} \right] \right] \\ &= \frac{(2 + 3(1-v)^2 c^2 + (1-v)^4) - c - 1}{c^3 \sqrt{c} (1-v)}. \end{aligned}$$

Observación 3.12. La invariante Θ puede ser obtenida como especialización de Υ mediante el siguiente cambio de variable:

$$\tilde{\Theta} := \tilde{\Upsilon}(1, v) \quad (3.16)$$

3.2.3. Invariante $\tilde{\Omega}$

Para finalizar con las invariantes para tied links, se presenta a continuación la invariante $\tilde{\Omega}$ que surge de la siguiente especialización

$$\tilde{\Omega} := \tilde{Y}(u, 1). \quad (3.17)$$

Notar que al hacer $v = 1$ se tiene que $c = u^{-1}$, luego, $\tilde{\Omega}$ toma valores en $\mathbb{C}(\sqrt{u}, a, b)$ y puede construirse por relaciones skein, como muestra el siguiente teorema:

Teorema 3.10. *La invariante $\tilde{\Omega}$ queda únicamente determinada por los siguientes axiomas*

1. $\tilde{\Omega}(\bigcirc) = 1$,
2. $\tilde{\Omega}(L \sqcup \bigcirc) = \frac{\sqrt{u}}{a} \tilde{\Omega}(L)$,
3. $\tilde{\Omega}(L \tilde{\sqcup} \bigcirc) = \frac{b\sqrt{u}}{a} \tilde{\Omega}(L)$,
4. $\sqrt{u} \tilde{\Omega}(L_+) - \frac{1}{\sqrt{u}} \tilde{\Omega}(L_-) + (\frac{1}{\sqrt{u}} - \sqrt{u}) \tilde{\Omega}(L_+, \sim) = 0$.

3.3. Preguntas abiertas

Una pregunta natural que surge, en la sección 4.1, al notar que el polinomio de Homflypt puede ser construido mediante el álgebra de Hecke y el polinomio de Jones, una especialización del polinomio de Homflypt, puede ser construido mediante un cociente del álgebra de Hecke: el álgebra de Temperley–Lieb, es si el polinomio $\tilde{\mathcal{J}}$ puede ser construido mediante un álgebra que sea el cociente de la tBMW álgebra, dado que con esta álgebra se construye $\tilde{\mathcal{L}}$ y L .

El problema de construir $\tilde{\mathcal{J}}$ mediante la receta de Jones, utilizando cierta t -TL álgebra, es un trabajo en investigación de F. Aicardi, D. Arcis, J. Juyumaya y P. Papi.

Otro problema abierto es estudiar la potencia de la invariante $\tilde{Y}$, pues si bien esta se especializa en las invariantes $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\Theta}$ y $\tilde{\Omega}$, no se ha encontrado hasta ahora una pareja de tied links que sean distinguidos por $\tilde{Y}$ y no por sus especializaciones.

Capítulo 4

Invariante de tipo Kauffman para tied link

En el presente capítulo se expone el aporte original de esta tesis: la construcción de una invariante, mediante la receta de Kauffman, para tied links. La demostración de la existencia de esta invariante está basada en el método de Lickorich [19, Teorema 15.2]. En la Sección 1, se introducirán algunas definiciones y lemas necesarios para lo que sigue. Luego, en la Sección 2, se mostrará el resultado principal de este capítulo, esto es el Teorema 4.1. Finalmente en la Sección 3 se presentan una extensión de esta construcción y una conjetura.

4.1. Previos

Definición 4.1. *Sea D un diagrama de un tied link, entonces:*

- 1. D se dirá ordenado si se da un orden a sus componentes,*
- 2. D se dirá basado si se fija un punto, llamado punto base, en cada componente.*

Definición 4.2. *Sea D un diagrama orientado, ordenado y basado, de un tied link. Se llamará diagrama ascendente asociado a D a aquel diagrama obtenido a partir de D al que se le han cambiado algunos cruces (positivos por negativos) de tal forma que al recorrerlo por la orientación inducida, en el orden inducido e iniciando desde los mismos puntos base, resulta que cada cruce es atravesado primeramente por su arco inferior.*

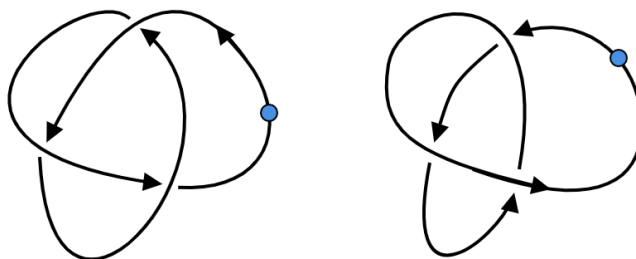


Figura 4.1: A la izquierda un diagrama (no ascendente) del nudo trébol y a la derecha su respectivo diagrama ascendente.

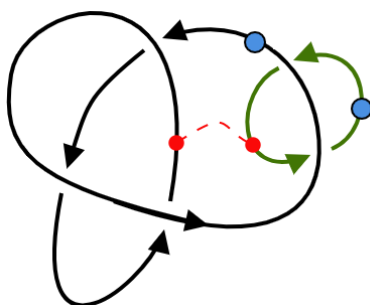
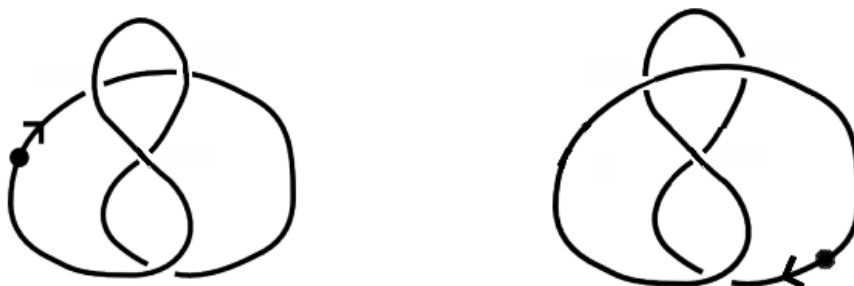


Figura 4.2: Diagrama ascendente del nudo trébol con una componente trivial ligada mediante un tie.

Observación 4.1. Para un nudo o link dado, no existe un único diagrama ascendente, por ejemplo, los siguientes son dos diagramas ascendentes para el nudo ocho:



Notación 4.1. Se denotará por αD un diagrama ascendente asociado al diagrama D .

Definición 4.3. Un diagrama D de un tied link se dirá ascendente, si existe un orden y puntos base para cada componente, tal que $D = \alpha D$.

A continuación se presentará un lema, necesarios para demostrar el teorema principal del presente capítulo: Teorema 4.1.

Lema 4.1. *Si un diagrama D de un tied link orientado es ascendente, entonces representa un tied link compuesto de componentes no anudadas disjuntas, admitiendo que algunas de ellas pueden estar conectadas por ties.*

Demostración. Nótese que los ties, al no ser objetos topológicos, pueden obviarse durante demostración y volver a incorporarse al final, según las componentes que conectaban originalmente. La demostración comenzará suponiendo el caso en que D tiene solo una componente; así, debemos concluir que D es el diagrama trivial. Sea A el punto base de D y A' un punto de D ubicado inmediatamente después del último cruce inferior recorrido. Sea p el camino que se obtiene recorriendo D desde A hasta A' y p' el camino obtenido de recorrer desde A' hasta A , ambos tomando en cuenta la orientación inducida por D . Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que, si $x \in p$ y $x' \in p'$, la coordenada z de x es menor o igual que la coordenada z de x' y la igualdad se cumple si y solo si x, x' pertenecen a $\{A, A'\}$. También se observa que todos los cruces de D están formados por una rama en p (cruce inferior) y una rama en p' (cruce superior), por lo cual los diagramas de p y p' no poseen cruces. Así, se concluye que D puede ser visto como suma conexas de dos nudos triviales, por ende D es el diagrama trivial de 1 componente.

Suponiendo ahora que D tiene n componentes, $U_1, \dots, U_n$ (todas triviales) ordenadas, con un razonamiento similar al anterior, se puede suponer que si $x_i \in U_i$ y $x_j \in U_j$, para todo $1 \leq i < j \leq n$, entonces la coordenada z de x_i es menor estricta a la coordenada z de x_j . De esta forma, se tiene que D es un enlace trivial de n componentes. $\square$

4.2. Invariante de tipo Kauffman

Ahora enunciaremos y demostraremos el teorema principal de la tesis, pero antes recordemos que c^+, c^- están definidos en la figura 1.5 y que los diagramas asociados a D^+, D^-, D'' están definidos en las figuras 2 y 3.

Teorema 4.1. *Existe una única función $\mathcal{H} : \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ tal que:*

1. $\mathcal{H}$ es invariante de isotopía regular para tied links orientados,
2. $\mathcal{H}(\bigcirc) = 1$,

3. $\mathcal{H}(D \sqcup \bigcirc) = y \mathcal{H}(D), \quad \mathcal{H}(D \tilde{\sqcup} \bigcirc) = \frac{t-t^{-1}}{x} \mathcal{H}(D),$
4. $\mathcal{H}(c^+) = t \mathcal{H}(\sim) \text{ y } \mathcal{H}(c^-) = t^{-1} \mathcal{H}(\sim),$
5. $\mathcal{H}(D_+) - \mathcal{H}(D_-) = x \mathcal{H}(D_{D'', \sim}).$

Notación 4.2. Se denotará por $\bigcirc^{c,s}$ al link trivial con c componentes y $s \leq c-1$ ties esenciales. Similarmente, $\bigcirc_n^{c,s}$ denotará a un tied link equivalente al anterior pero con n cruces.

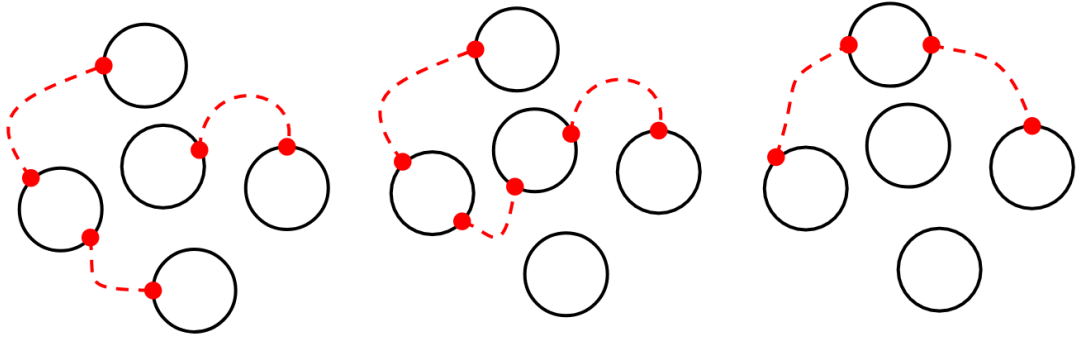


Figura 4.3: Ejemplos de $\bigcirc^{5,3}$, $\bigcirc^{5,3}$ y $\bigcirc^{5,2}$ respectivamente

Antes de demostrar el teorema 4.1, se probará el siguiente lema.

Lema 4.2. Si $\mathcal{H}$ satisface las hipótesis del teorema anterior, entonces

1. $\mathcal{H}(D \sqcup \bigcirc^{n,0}) = y^n \mathcal{H}(D),$
2. $\mathcal{H}(D \tilde{\sqcup} \bigcirc^{n,n-1}) = \left(\frac{t-t^{-1}}{x} \right)^n \mathcal{H}(D).$

Demostración. La prueba de ambos ítem se realiza por inducción sobre n .

Demostremos el primer ítem. Tomando $n = 1$ tenemos que $\mathcal{H}(D \sqcup \bigcirc) = y \mathcal{H}(D)$. Luego, asumamos que se cumple la afirmación para todo $n \leq k$. Usando la hipótesis de inducción, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}(D \sqcup \bigcirc^{k+1,0}) &= \mathcal{H}(D \sqcup \bigcirc \sqcup \bigcirc^{k,0}) \\
 &= y^k \mathcal{H}(D \sqcup \bigcirc) \\
 &= y^{k+1} \mathcal{H}(D).
 \end{aligned}$$

Análogamente, para el segundo ítem si tomamos $n = 1$ tenemos que

$$\mathcal{H}(D \tilde{\square} \bigcirc) = \left(\frac{t - t^{-1}}{x} \right) \mathcal{H}(D).$$

Luego, asumamos que se cumple para $n = k$ y probemos que se tiene para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(D \tilde{\square} \bigcirc^{k+1, k}) &= \mathcal{H}(D \tilde{\square} \bigcirc \tilde{\square} \bigcirc^{k, k-1}) \\ &= \left(\frac{t - t^{-1}}{x} \right)^k \mathcal{H}(D \tilde{\square} \bigcirc) \\ &= \left(\frac{t - t^{-1}}{x} \right)^{k+1} \mathcal{H}(D). \end{aligned}$$

□

El siguiente lema prueba que $\mathcal{H}$ es invariante por movimientos de tipo R2 y R3.

Lema 4.3. $\mathcal{H}$ es invariante de isotopía regular para tied links.

Demostración. Veamos en primer lugar que se cumple R2. Sea D un diagrama con $n+1$ cruces, si este es de tipo $\bigcirc_{n+1}^{c,s}$, entonces claramemnte se satisface R2. Consideremos ahora diagramas idénticos a D pero con diferencia en algún cruce asociado a un movimiento R2 según la notación de la figura 4.4.

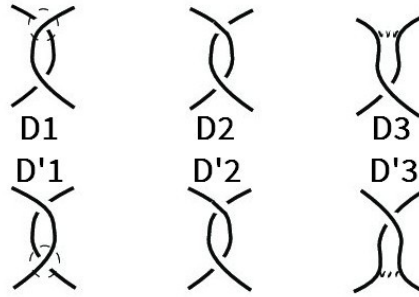


Figura 4.4

Aplicando la relación skein 5, tenemos las ecuaciones:

$$\mathcal{H}(D1) - \mathcal{H}(D2) = x \mathcal{H}(D3),$$

$$\mathcal{H}(D'1) - \mathcal{H}(D'2) = x\mathcal{H}(D'3).$$

Notando ahora que $D2 = D'2$ y que $D3 = D'3$ se obtiene directamente que $D1 = D'1$.

Veamos ahora el caso de R3, para esto utilizaremos el mismo método que se utilizó para probar que se cumple R2 pero con los diagramas de la figura 4.5:

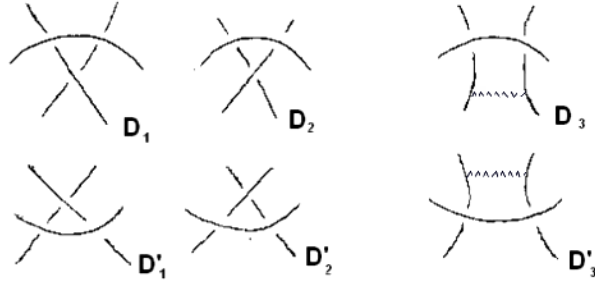


Figura 4.5

Notemos que, aplicando la relación skein 5, se tienen las ecuaciones:

$$\mathcal{H}(D2) - \mathcal{H}(D1) = x\mathcal{H}(D3),$$

$$\mathcal{H}(D'2) - \mathcal{H}(D'1) = x\mathcal{H}(D'3).$$

Como $D3 = D'3$ si probamos $\mathcal{H}(D1) = \mathcal{H}(D'1)$ obtenemos $\mathcal{H}(D2) = \mathcal{H}(D'2)$ y viceversa.

Esto quiere decir que podemos cambiar los cruces como en la figura 4.6 y una vez hecho esto, repetir el proceso para el nuevo diagrama. Haciendo esto, podemos suponer ahora que los 3 cruces en cuestión no cambian cuando se obtiene el diagrama ascendente. De esta forma se tiene que $\mathcal{H}$ respeta R3 y por lo tanto es invariante de isotopía regular.



Figura 4.6

□

A continuación se realiza la prueba del teorema enunciado en el presente capítulo.

Teorema 4.1. La demostración es por inducción sobre la cantidad de cruces, en particular, se probará que $\mathcal{H}$ evaluado en todo tied link de $n + 1$ cruces puede calcularse como la suma de $\mathcal{H}$ evaluado en un diagrama ascendente de $n + 1$ cruces y $\mathcal{H}$ evaluado en links de a lo más n cruces. Si el link tiene un cruce, la afirmación es clara.

Supongamos ahora que el teorema es cierto para diagramas con a lo más n cruces. Veremos que el teorema es valido para diagramas con $n + 1$ cruces.

En primer lugar, notemos que si D tiene n cruces, entonces $D \sqcup \bigcirc$ y $D \tilde{\sqcup} \bigcirc$ también tienen n cruces. Luego, por el Lema 4.2 tenemos que

$$\mathcal{H}(\bigcirc^{c,s}) = \left(\frac{t - t^{-1}}{x} \right)^s y^{c-s-1}.$$

Esto implica a su vez que

$$\mathcal{H}(\bigcirc_n^{c,s}) = t^{\overline{w}} \mathcal{H}(\bigcirc^{c,s}),$$

donde $\overline{w}$ es la suma de los writhe de las c componentes de $\bigcirc_n^{c,s}$.

Sea ahora, D un diagrama de tied-link orientado con $n + 1$ cruces, c componentes y s ties esenciales. Tenemos dos casos:

Caso 1. Si D es equivalente a $\bigcirc_{n+1}^{c,s}$, entonces $\mathcal{H}(D) = t^{\overline{w}} \left(\frac{t-t^{-1}}{x} \right)^s y^{c-s-1}$.

Caso 2. En el caso contrario al Caso 1, i.e. D no es equivalente a $\bigcirc_{n+1}^{c,s}$, tenemos que cambiando algunos D_- a D_+ en D , podemos construir un diagrama ascendente αD con c componentes (triviales) no-linkeadas, s ties esenciales y $n + 1$ cruces. Para hacer lo anterior es necesario que el diagrama D sea dotado de un orden, puntos base (uno por cada componente) y orientación; notemos que esto último ya se cumple. Además, dado que los ties no son objetos topológicos¹, la independencia del orden y puntos base escogidos queda demostrada de forma análoga al caso de links clásicos [19, Teoremas 15.2 y 15.5].

En en el contexto del segundo caso, para calcular $\mathcal{H}(D)$, comencemos por tomar $x_1, \dots, x_m$, $m \leq n$, cruces D_- que es necesario pasar a D_+ , para así alcanzar αD . Sea $D_{\pm}^{(1)}$ el diagrama D salvo que el cruce x_1 coincide con $D_{\pm}$. Entonces $\mathcal{H}(D_{\pm}^{(1)})$ queda escrito

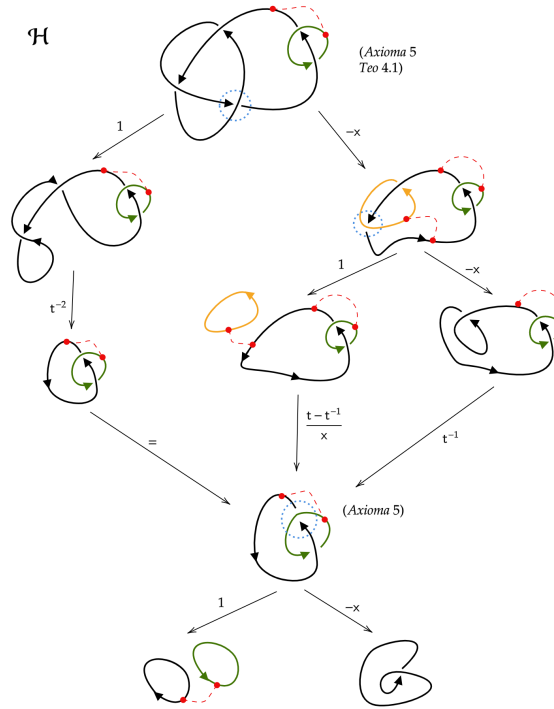
¹Ellos indican las componentes relacionadas en el link o bien puede pensarse que los ties pueden desplazarse libremente en la componentes que ellos conectan.

en función de $\mathcal{H}(D_+^{(1)})$ y de $\mathcal{H}$ evaluado sobre un diagrama con n cruces. Sea ahora $D_{\pm}^{(2)}$ el diagrama $D_+^{(1)}$ salvo que el cruce x_2 coincide con $D_{\pm}$. Luego $\mathcal{H}(D_{\pm}^{(2)})$ queda escrito en función de $\mathcal{H}(D_+^{(2)})$ y de $\mathcal{H}$ evaluado sobre un diagrama con $n-1$ cruces. Luego de iterar el procedimiento anterior, tenemos que $\mathcal{H}$ sobre $D_-^{(m)}$ está escrito en función de $\mathcal{H}$ sobre $D_+^{(m)} = \alpha D$ y $\mathcal{H}$ sobre diagramas de a lo más n cruces, el valor de $\mathcal{H}(D)$ puede ser calculado usando la hipótesis de inducción.

Para probar la regla 4 notemos que se cumple trivialmente si el diagrama D es $\bigcirc_{n+1}^{c,s}$. Además, para todo c^+ o c^- presente en alguna componente del diagrama D es posible escoger un punto base de forma que el cruce asociado al loop no deba ser cambiado a D_+ . Así, el mismo loop estará presente en αD y $\mathcal{H}(\alpha D) = t^{\pm} \mathcal{H}(\alpha D')$, en donde $\alpha D'$ es αD al que se le ha eliminado el loop mediante un movimiento de Reidemeister de tipo I. Luego, como el factor $t^{\pm}$ permanece a lo largo del cálculo de $\mathcal{H}(D)$ se tiene que $\mathcal{H}(D) = t^{\pm} \mathcal{H}(D')$ y por lo tanto la regla 4 se cumple para diagramas de $n+1$ cruces

Finalmente, utilizando el lema 4.3 se prueba el teorema. $\square$

Al igual que para las invariantes del capítulo anterior, se calcula la invariante $\mathcal{H}$ sobre el ejemplo transversal de la tesis



Así, la invariante $\mathcal{H}$ sobre T vale:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(T) &= \left[t^{-2} - x \left(\frac{t - t^{-1}}{x} - xt \right) \right] \left[\frac{t - t^{-1}}{x} - \frac{x}{t} \right] \\ &= (-t^{-3} + t^{-1} - t^{-2} + 2 + t^2)x^{-1} + 1 - t^2 + (-t^{-1} - 1 + t^2)x + t^2x^2.\end{aligned}$$

Según la receta de Kauffman ver [17], se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *La función N es una invariante para tied links orientados, donde*

$$N(D) := t^{-w(D)} \mathcal{H}(D). \quad (4.1)$$

4.3. Preguntas abiertas y trabajo futuro

Hasta cerca del final de la escritura del presente trabajo, se desconocía la naturaleza de la invariante N , esto es, no se sabía si era una invariante de las comentadas en el capítulo 3, construida de forma original, o una invariante distinta a estas. Sin embargo, gracias a las discusiones y comentarios de F. Aicardi y J. Juyumaya se obtuvo el siguiente teorema

Teorema 4.3. *La invariante $N(x^\pm, y^\pm, t^\pm)$ es, de hecho, la invariante $\tilde{\Theta}(v, a, \sqrt{c})$ mediante el cambio de variable $x = v - 1$, $y = \frac{1}{a\sqrt{c}}$, $t = \frac{1}{\sqrt{c}}$.*

Queda como problema abierto la posible generalización de N a una invariante en 4 variables utilizando una construcción similar mediante el método de Kauffman, esto es, construir una invariante análoga a la definida en 4.1, donde el cambio fundamental sería en el axioma 5. En tal caso, verificar si la invariante obtenida corresponde a una nueva construcción de $\tilde{Y}$.

Apéndice A

Álgebras de Nudos

A.1. Álgebra de Hecke

Sea u una indeterminada en $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}(u)$ el cuerpo de funciones racionales en la indeterminada u . Para n natural, el álgebra de Hecke, denotada $H_n(u)$ o simplemente H_n , es definida por $H_1 = \mathbb{C}(u)$ y para $n > 1$ como la $\mathbb{C}(u)$ -álgebra con generadores $h_1, \dots, h_{n-1}$ sujetos a las relaciones:

$$h_i h_j = h_j h_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.1})$$

$$h_i h_j h_i = h_j h_i h_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.2})$$

$$h_i^2 = u + (u - 1)h_i \quad \text{para todo } i. \quad (\text{A.3})$$

Los h_i 's son invertibles y

$$h_i^{-1} = (u^{-1} - 1) + u^{-1}h_i. \quad (\text{A.4})$$

A.1.1. Álgebra de Temperley-Lieb

El álgebra de Temperley-Lieb, sobre $\mathbb{C}$, está definida por los generadores $1, k_1, \dots, k_{n-1}$ sujetos a las siguientes relaciones:

$$k_i k_j = k_j k_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.5})$$

$$k_i k_j k_i = \tau k_i \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.6})$$

$$k_i^2 = k_i \quad \text{para todo } i. \quad (\text{A.7})$$

donde $\tau \in \mathbb{C}^\times$.

El álgebra de Temperley–Lieb puede ser construida como un cociente del álgebra de Hecke. En efecto, definamos f_i por

$$f_i = \frac{1}{u+1}(h_i + 1).$$

Luego, el álgebra de Hecke puede ser presentada con los generadores $f_1, \dots, f_{n-1}$ y las siguientes relaciones:

$$f_i f_j = f_j f_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.8})$$

$$f_i^2 = f_i \quad \text{para todo } i \quad (\text{A.9})$$

$$f_i f_j f_i - X f_i = f_j f_i f_j - X f_j \quad \text{para } |i - j| = 1. \quad (\text{A.10})$$

donde $X = \frac{u}{(u+1)^2}$.

El álgebra de Temperley–Lieb corresponde a tomar el cociente del álgebra de Hecke por el ideal bilatero generado por las expresiones $f_i f_j f_i - X f_i = 0$.

A.2. Álgebra de Yokonuma–Hecke

El álgebra de Yokonuma–Hecke, denotada por $Y_{d,n}(u)$, se define como sigue: $Y_{1,1}(u) = \mathbb{C}(u)$, y para $d, n \geq 2$ como el álgebra presentada por los generadores de trenzas $g_1, \dots, g_{n-1}$ y por los generadores de framing $t_1, \dots, t_n$, sujetos a las siguientes relaciones:

$$g_i g_j = g_j g_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.11})$$

$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.12})$$

$$t_i t_j = t_j t_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (\text{A.13})$$

$$t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \quad \text{para todo } i, j, \quad (\text{A.14})$$

$$t_i^d = 1 \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.15})$$

$$g_i^2 = 1 + (u - 1)e_i(1 + g_i) \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.16})$$

donde $s_i = (i, i + 1)$ y

$$e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s}.$$

A.3. bt-Álgebra

Sea n un número natural. El álgebra $\mathcal{E}_n(u)$ es definida como el álgebra asociativa sobre el cuerpo de funciones racionales $\mathbb{C}(u)$ con generadores de trenzas $g_1, \dots, g_{n-1}$ y generadores de ties $e_1, \dots, e_{n-1}$, sujetos a las siguientes relaciones:

$$g_i g_j = g_j g_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.17})$$

$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.18})$$

$$e_i^2 = e_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.19})$$

$$e_i e_j = e_j e_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (\text{A.20})$$

$$e_i g_i = g_i e_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.21})$$

$$e_i g_j = g_j e_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.22})$$

$$e_j g_i g_j = g_i g_j e_i \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.23})$$

$$e_i e_j g_j = e_i g_j e_i = g_j e_i e_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.24})$$

$$g_i^2 = 1 + (u^{-1} - 1)e_i(1 - g_i). \quad (\text{A.25})$$

A.3.1. bt-Álgebra con dos parámetros

Sea v una variable que conmuta con u , y sea $\mathbb{K} = \mathbb{C}(u, v)$. La bt-álgebra con dos parámetros, denotada por $\mathcal{E}_n(u, v)$, es definida por $\mathcal{E}_1(u, v) := \mathbb{K}$ y, para $n > 1$, como la $\mathbb{K}$ -álgebra asociativa, con unidad 1, presentada por los generadores de trenzas $g_1, \dots, g_{n-1}$ y los generadores de ties $e_1, \dots, e_{n-1}$, sujetos a las siguientes relaciones:

$$e_i e_j = e_j e_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (\text{A.26})$$

$$e_i^2 = e_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.27})$$

$$e_i g_j = g_j e_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.28})$$

$$e_i g_i = g_i e_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.29})$$

$$e_i g_j g_i = g_j g_i e_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.30})$$

$$e_i e_j g_i = e_j g_i e_j = g_i e_i e_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.31})$$

$$g_i g_j = g_j g_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.32})$$

$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.33})$$

$$g_i^2 = 1 + (u - 1)e_i + (v - 1)e_i g_i \quad \text{para todo } i. \quad (\text{A.34})$$

Notar que todo g_i es invertible, y

$$g_i^{-1} = g_i + (1 - v)u^{-1}e_i + (u^{-1} - 1)e_i g_i. \quad (\text{A.35})$$

A.4. t-BMW Álgebra

Aquí, se introduce la t-BMW Álgebra que juega un rol análogo para el invariante $\widetilde{\mathcal{L}}$ que la BMW Álgebra para el polinomio de Kauffman F .

Sea $\mathbb{F} = \mathbb{C}(x, y, a)$. Para todo $n \geq 1$, se define la tied BMW álgebra, o t-BMW álgebra, denotada por $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n(x, y, a)$, como la $\mathbb{F}$ -álgebra igual a $\mathbb{F}$ para $n = 1$ y, para $n > 1$, generada por los generadores de trenzas $g_1, \dots, g_{n-1}$, generadores de tangles $h_1, \dots, h_{n-1}$, generadores de ties $e_1, \dots, e_{n-1}$ y generadores de ties-tangles $f_1, \dots, f_{n-1}$ sujetos a las siguientes relaciones:

Relaciones de trenzas:

$$g_i g_j = g_j g_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.36})$$

$$g_i g_j g_i = g_j g_i g_j \quad \text{para } |i - j| = 1. \quad (\text{A.37})$$

Relaciones de la BMW álgebra:

$$h_i^2 = x^{-1}h_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.38})$$

$$h_i h_j = h_j h_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.39})$$

$$g_i h_j = h_j g_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.40})$$

$$g_i h_i = h_i g_i = a^{-1}h_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.41})$$

$$h_i g_j h_i = a h_i \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.42})$$

$$h_i h_j h_i = h_i \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.43})$$

$$g_i g_j h_i = h_j g_i g_j = h_j h_i \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.44})$$

$$g_i h_j g_i = g_j^{-1} h_i g_j^{-1} \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.45})$$

$$g_i h_j h_i = g_j^{-1} h_i \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.46})$$

$$h_i h_j g_i = h_i g_j^{-1} \quad \text{para } |i - j| = 1. \quad (\text{A.47})$$

Relaciones de trenzas ligadas:

$$e_i e_j = e_j e_i \quad \text{para todo } i, j, \quad (\text{A.48})$$

$$e_i^2 = e_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.49})$$

$$e_i g_i = g_i e_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.50})$$

$$e_i g_j = g_j e_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.51})$$

$$e_i e_j g_i = g_i e_i e_j = e_j g_i e_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.52})$$

$$e_i g_j g_i = g_j g_i e_j \quad \text{para } |i - j| = 1. \quad (\text{A.53})$$

Nuevas relaciones:

$$e_i h_i = h_i e_i = h_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.54})$$

$$e_i h_j = h_j e_i \quad \text{para } |i - j| > 1, \quad (\text{A.55})$$

$$f_i e_i = e_i f_i = f_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.56})$$

$$f_i e_j = e_j f_i = e_j h_i e_j \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.57})$$

$$f_i g_i = g_i f_i = a^{-1}f_i \quad \text{para todo } i, \quad (\text{A.58})$$

$$g_i f_j g_i = g_j^{-1} f_i g_j^{-1} \quad \text{para } |i - j| = 1, \quad (\text{A.59})$$

$$g_i + g_i^{-1} = z(e_i + f_i) \quad \text{para todo } i. \quad (\text{A.60})$$

Los generadores, pueden verse en forma de diagrama como en la siguiente figura

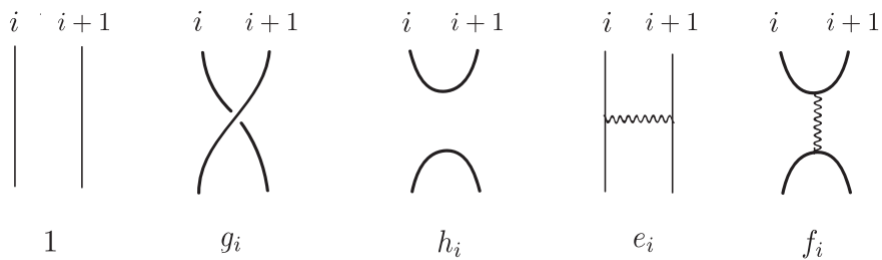


Figura A.1

Bibliografía

- [1] AICARDI, F. New invariants of links from a skein invariant of colored links. *arXiv* (dec 2015), 1–23.
- [2] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. Tied links. *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 25, 9 (2016), 1–28.
- [3] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. An algebra involving braids and ties. *arXiv* 3, 1 (sep 2017), 1–15.
- [4] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. Kauffman type invariants for tied links. *Mathematische Zeitschrift* 289, 1-2 (2018), 567–591.
- [5] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. Tied links and invariants for singular links. *arXiv* (jul 2018).
- [6] AICARDI, F., AND JUYUMAYA, J. Two Parameters bt-Algebra and Invariants for Links and Tied Links. *Arnold Mathematical Journal* 6, 1 (2020), 131–148.
- [7] ALEXANDER, J. W. Topological Invariants of Knots and Links. *Transactions of the American Mathematical Society* 30, 2 (1928), 275.
- [8] BIGELOW, S., RAMOS, E., AND YI, R. The Alexander and Jones Polynomials through Representations of Rook Algebras. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 21, 12 (oct 2012), 1250114.
- [9] BIRMAN, J. S., AND WENZL, H. Braids, Link Polynomials and a New Algebra. *Transactions of the American Mathematical Society* 313, 1 (1989), 249.
- [10] CHLOUVERAKI, M., JUYUMAYA, J., KARVOUNIS, K., AND LAMBROPOULOU, S. Identifying the Invariants for Classical Knots and Links from the Yokonuma-Hecke Algebras. *International Mathematics Research Notices* 2020, 1 (2020), 214–286.

-
- [11] FITZGERALD, D. G. A presentation for the monoid of uniform block permutations. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 68, 2 (oct 2003), 317–324.
 - [12] HOSTE, J. A polynomial invariant of knots and links. *Pacific Journal of Mathematics* 124, 2 (1986), 295–320.
 - [13] JONES, V. F. A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society* 12, 1 (1985), 103–111.
 - [14] JONES, V. F. R. Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials. *The Annals of Mathematics* 126, 2 (1987), 335.
 - [15] KAUFFMAN, L. H. *Formal Knot Theory*. Dover Publications Inc, 1983.
 - [16] KAUFFMAN, L. H. State models and the jones polynomial. *Topology* 26, 3 (1987), 395–407.
 - [17] KAUFFMAN, L. H. An Invariant of Regular Isotopy. *Transactions of the American Mathematical Society* 318, 2 (1990), 417.
 - [18] KAUFFMAN, L. H. *Knots and Physics*. WORLD SCIENTIFIC, 2013.
 - [19] LICKORISH, W. *An Introduction to Knot Theory*. Springer-Verlag New York, 1997.
 - [20] MANSOUR, T. *Combinatorics of Set Partitions*. Chapman and Hall/CRC, jul 2012.
 - [21] MURASUGI, K. *Knot Theory & Its Applications*. Birkhäuser, 2008.
 - [22] RYOM-HANSEN, S. On the representation theory of an algebra of braids and ties. *Journal of Algebraic Combinatorics* 33, 1 (2011), 57–79.