



Universidad de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Insituto de Matemáticas

La métrica de Schwarzschild como solución a las ecuaciones de campo de Einstein

*Tesis para optar al grado de
Magíster en Matemáticas*

Presentada por:
VICTOR FUENTES LABRA

Profesor Guía: Dr. Rodrigo Castro Marín

VALPARAÍSO
ENERO 2021

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mi padres por brindarme la oportunidad de acceder a la educación y conocer el bello mundo del conocimiento. A mi pareja Pauline por estar siempre a mi lado y brindar su apoyo incondicional ante las adversidades de la vida.

Al profesor Rodrigo Castro Marín por sus sabios consejos a lo largo de toda la carrera, por contribuir a mi formación como matemático y motivarme a mejorar desinteresadamente, y quien como director de tesis me orientó, apoyó y corrigió cada vez que fue necesario para concluir este trabajo.

A todo aquel que durante estos últimos años contribuyó a mi formación profesional, en especial a mis profesores y compañeros/colegas del Instituto de Matemáticas por su apoyo moral y esas largas jornadas de estudio, las cuales siempre llevaré en mi memoria.

Resumen

En este trabajo de tesis estudiaremos la geometría de la relatividad general. Comenzamos con un breve estudio de tensores, variedades diferenciables, fibrados vectoriales, campos de tensores y métricas de Riemann y pseudoriemannianas. Luego, introduciremos conceptos de relatividad general tales como estructura causal y espacio-tiempos, donde nos centraremos en el espacio tiempo de Schwarzschild como solución a las ecuaciones de Einstein. Finalmente, discutiremos acerca de las ecuaciones generales de movimiento, considerando el movimiento de caída libre de una partícula o fotón (luz) en un campo gravitacional.

Índice general

Introducción	1
1. Algunos resultados preliminares sobre geometría diferencial.	3
1.1. Tensores	3
1.1.1. Espacios duales y biduales	4
1.1.2. El producto tensorial	12
1.1.3. El problema de cambio de base	15
1.1.4. Tensores desde un punto de vista físico-geométrico	19
1.1.5. Equivalencia entre las dos definiciones de tensores.	20
1.1.6. Espacios de tensores	21
1.2. Variedades diferenciables y espacios tangente	25
1.3. Fibrados vectoriales	34
1.4. Campos vectoriales	38
1.4.1. La diferencial y subvariedades	40
1.5. Métricas riemannianas y pseudo riemannianas	44
1.5.1. Derivada covariante y curvatura	48
2. Algunos preliminares de relatividad general	59
2.1. Introducción a relatividad	59
2.2. Estructura causal	61
2.3. Ejemplos de espacio-tiempo	69
2.3.1. Espacio - tiempo de Minkowski	69
2.3.2. Espacio - tiempo de Schwarzschild	71
2.4. La solución de Schwarzschild	76
2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange	94
2.6. Geodésicas de Schwarzschild	99

Introducción

Si hay dos ideas claves que han permeado la historia de la geometría diferencial hasta la fecha, estas son el deseo de entender y ampliar el trabajo de F. Gauss con la continua influencia de problemas físicos en la dirección de varias vías de investigación. En el período entre 1854 y 1900 los geómetras estaban más obsesionados con el lenguaje de la geometría diferencial que con el tema en sí. Esta obsesión por el simbolismo culminó con el desarrollo del cálculo tensorial de G. Ricci (1853-1925) y su estudiante T. Levi-Civita (1873-1941), ver [5, 9, 14]. Fue sobre la vista abstracta de B. Riemann acerca del espacio y el cálculo tensorial que A. Einstein (1879-1955) basó su teoría de gravitación, comúnmente llamada Teoría General de la Relatividad, la cual es considerada por muchos como el principal logro del pensamiento humano sobre la obtención de una teoría que formaliza el comportamiento de la naturaleza, ver [2].

La Teoría Especial de la Relatividad propuesta por Einstein en 1905, surgió con el objetivo de conciliar dos grandes teorías de la física clásica: la Mecánica Newtoniana y la Teoría Electromagnética de Maxwell. En 1908, H. Minkowski, antiguo profesor de Einstein en Zurich, propuso una formulación geométrica de la teoría de Einstein introduciendo el espacio-tiempo de Minkowski, ver [4]. Más tarde, Einstein concluyó que un campo gravitatorio produce una curvatura en el espacio-tiempo, es decir, sustituir la acción a distancia que produce un campo gravitatorio creado por un cuerpo, según la Teoría Clásica de Gravitación, por la idea de que tal cuerpo lo que produce es una distorsión del espacio a su alrededor, la cual es medida por un concepto estudiado en la geometría Riemanniana; la curvatura. Además, Einstein concluyó que debía expresarse como una variación en la métrica de Minkowski η , sustituyéndola por una métrica de Lorentz g , ver [11].

En 1915, Einstein pudo llegar a la formulación completa de la Teoría General de la Relatividad, presentando las ecuaciones que determinan el campo gravitatorio g a partir de las condiciones del medio, esto es, relacionan la presencia de materia con la curvatura del espacio-tiempo. Más exactamente, cuanto mayor sea la concentración de materia representada por el tensor de energía-momento, mayores serán las componentes del tensor de curvatura de Ricci, ver [11, 12].

Pese a la dificultad de estas ecuaciones y para la sorpresa de Einstein, pocos meses después que presentara sus ecuaciones, Karl Schwarzschild (1873-1916) usando simetrías presentó una solución exacta, modelando el campo gravitatorio exterior a una estrella con distribución de masa uniforme e independiente del tiempo. Este resultado tiene una enorme importancia debido, entre otras cosas, a que permite estudiar algunos fenómenos gravitatorios en la naturaleza, como el avance del perihelio de mercurio, que la Teoría Clásica de Gravitación propuesta por I. Newton en el siglo XVII no explicaba. En 1923, G. D. Birkhoff (1884-1944) estableció que las únicas soluciones de la ecuación de Einstein con simetría esférica en el vacío venían dada por la métrica de Schwarzschild, la cual predice fenómenos tales como la existencia de agujeros negros y de ondas gravitacionales, entre otros. Ver [2, 10].

El propósito de esta tesis es describir el campo gravitatorio producido por un cuerpo esférico, simétrico, estático (una estrella) que supondremos situado en el espacio-tiempo descrito por la Teoría General de la Relatividad. Supondremos que en el exterior de la estrella, no existen fenómenos físicos de naturaleza no gravitatoria y en cuyo caso, la métrica que representa el campo gravitatorio debe tener tensor de Ricci nulo. En resumen, el objetivo principal es escribir un estudio sobre la geometría de la solución de Schwarzschild. Dado que la Relatividad General es un área que se ha desarrollado durante varias décadas y los autores han utilizado una variedad de enfoques y notaciones diferentes, nuestro propósito es escribir una presentación unificada de algunos de los resultados en este campo.

Capítulo 1

Algunos resultados preliminares sobre geometría diferencial.

Mediante una rigurosa revisión bibliográfica, analizaremos algunos resultados sobre tensores, variedades diferenciables y geometría pseudo-riemanniana. Así, este capítulo contendrá la base teórica. Los detalles pueden ser encontrados en [1, 5, 9, 14, 15].

1.1. Tensores

En matemática, hay diferentes formas de definir el concepto de tensor. Nosotros estudiaremos los tensores a través del lenguaje de las funciones multilineales y también, los veremos como cantidades y como estas son afectadas ante un cambio de coordenadas mediante una ley de transformación, estableciendo una equivalencia entre ambas definiciones.

La motivación para estudiar el cálculo tensorial es que este nos permitirá definir formalmente métricas riemannianas y pseudo-riemannianas. Así, comenzamos con la definición de tensor sobre un espacio vectorial: como funciones multilineales desde el producto cartesiano de una cantidad fija de veces un espacio vectorial por una cantidad fija de veces su espacio dual, sobre el cuerpo ante el cual está definido el espacio vectorial.

Para mayor detalle de lo que veremos en esta sección, ver [1, 7].

Sea V un espacio vectorial definido sobre $\mathbb{R}$ y de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Además, sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base para V . Sabemos que cada vector $v \in V$ lo podemos escribir de forma única como $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ donde los escalares reales v^i son las componentes de v en la base $\mathcal{B}$. Para simplificar notaciones introduciremos la siguiente convención.

Notación. Suma de Einstein: si previamente hemos fijado el número n , por convención se omite el símbolo de sumatoria $\sum_{i=1}^n$ si " i " aparece como subíndice y como superíndice en la misma expresión. Por ejemplo,

$$x_1 a^1 + \dots + x_n a^n = \sum_{i=1}^n x_i a^i \quad \text{se expresará por } x_i a^i.$$

Note que bajo esta convención $x_i a^i$, $x_j a^j$ y $x_\alpha a^\alpha$ representan la misma suma. Esto significa que escribiremos el vector $v = v^i e_i$ omitiendo el símbolo de sumatoria.

1.1.1. Espacios duales y biduals

Primero veremos algunos elementos del espacio dual que serán de utilidad para estudiar los tensores. En lo que sigue, asumiremos espacios vectoriales de dimensión finita n .

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial y $\mathbb{K}$ un cuerpo sobre el cual está definido. El conjunto

$$L(V, \mathbb{K}) := \{f : V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es lineal}\}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y es llamado espacio dual de V , el cual denotaremos por V^* .

La estructura de espacio vectorial está dada por la adición y el producto escalar usual

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v) := \lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v).$$

Dado que V^* es un espacio vectorial, podemos definir su dual.

Definición 1.1.2. Sea V un espacio vectorial y $\mathbb{K}$ un cuerpo sobre el cual está definido. El conjunto

$$(V^*)^* = L(V^*, \mathbb{K}) := \{\phi : V^* \rightarrow \mathbb{K} \mid \phi \text{ es lineal}\}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y es llamado espacio bidual de V que denotaremos por V^{**} .

Teorema 1.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{B}$ base de V . Entonces el conjunto $\mathfrak{B} = \{e^{*\alpha}\}_{\alpha=1}^n$ definido por

$$\begin{aligned} e^{*\alpha} : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto u^\alpha, \quad \text{donde } u = u^\alpha e_\alpha \end{aligned}$$

es una base de V^* . Además

$$e^{*\alpha}(e_\beta) = \delta_\beta^\alpha.$$

Demostración. Veamos que $e^{*\alpha} : V \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal. En efecto,

$$\begin{aligned} e^{*\alpha}(\gamma u + \delta v) &= e^{*\alpha}(\gamma(u^\beta e_\beta) + \delta(v^\beta e_\beta)) \\ &= e^{*\alpha}((\gamma u^\beta + \delta v^\beta) e_\beta) \\ &= (\gamma u^\alpha + \delta v^\alpha) \\ &= \gamma e^{*\alpha}(u) + \delta e^{*\alpha}(v). \end{aligned}$$

Veamos ahora que $\mathfrak{B}$ es linealmente independiente y que genera a todo el espacio. Para ello, primero consideremos la combinación lineal

$$x_1 e^{*1} + x_2 e^{*2} + \dots + x_n e^{*n} = 0,$$

donde el cero está definido como

$$\begin{aligned} 0 : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 0(x) = 0, \end{aligned}$$

por lo que evaluando en e_α , con $\alpha = 1, \dots, n$, se tiene

$$x_1 e^{*1}(e_\alpha) + x_2 e^{*2}(e_\alpha) + \dots + x_n e^{*n}(e_\alpha) = x_\alpha = 0,$$

es decir $x_\alpha = 0$ para $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Lo que prueba la independencia lineal de $\mathfrak{B}$.

Sea $f \in V^*$ y veamos que podemos expresar f como combinación lineal de los elementos de $\mathfrak{B}$. De hecho, probemos que

$$f = f(e_\alpha)e^{*\alpha}.$$

En efecto, sea $u \in V$, y consideremos $u = u^\beta e_\beta$. Luego

$$\begin{aligned} f(e_\alpha)e^{*\alpha}(u) &= f(e_\alpha)e^{*\alpha}(u^\beta e_\beta) \\ &= f(e_\alpha)u^\alpha \\ &= f(u^\alpha e_\alpha) \\ &= f(u). \end{aligned}$$

Por lo que $f(e_\alpha)e^{*\alpha} = f$. Es decir, $\mathfrak{B}$ genera a V^* . Concluimos que $\mathfrak{B}$ es una base para el espacio vectorial V^* . $\square$

Si $f \in V^*$, digamos $f = f(e_\alpha)e^{*\alpha}$, a los $f(e_\alpha)$ los llamaremos componentes covariantes de f en la base $\mathfrak{B}$.

Observación: cada base de V permite definir un isomorfismo distinto entre V y V^* . Esto es, si $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ y $\{b_\beta\}_{\beta=1}^n$ son bases distintas para V , las funciones lineales que satisfacen

$$\begin{aligned} \varphi: V &\longrightarrow V^* \\ e_\alpha &\longmapsto \varphi(e_\alpha) = e^{*\alpha} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \psi: V &\longrightarrow V^* \\ b_\alpha &\longmapsto \psi(b_\alpha) = b^{*\alpha} \end{aligned}$$

son isomorfismos diferentes, pues en general $\varphi(e_1) \neq \psi(e_1)$. En efecto, por un lado $\varphi(e_1) = e^{*1}$. Por otra parte, dado que $e_1 \in V$ y $\{b_\beta\}_{\beta=1}^n$ es base de V , entonces podemos expresar

$$e_1 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_n b_n.$$

Aplicando ψ a esta expresión

$$\begin{aligned}\psi(e_1) &= \gamma_1\psi(b_1) + \gamma_2\psi(b_2) + \dots + \gamma_n\psi(b_n) \\ &= \gamma_1b^{*1} + \gamma_2b^{*2} + \dots + \gamma_nb^{*n},\end{aligned}$$

donde podemos expresar $b^{*i} = \alpha_{ij}e^{*j}$, por lo que $\psi(e_1) = \gamma_i\alpha_{ij}e^{*j}$. Así $\psi(e_1) \neq e^{*1}$ en general, por lo tanto los isomorfismos no son los mismos, estos dependen de la elección de las bases.

Ejemplo 1.1.4. Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^3$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Esto es

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{aligned}e^{*1}(e_1) &= 1, e^{*1}(e_2) = 0, e^{*1}(e_3) = 0 \\ e^{*2}(e_1) &= 0, e^{*2}(e_2) = 1, e^{*2}(e_3) = 0 \\ e^{*3}(e_1) &= 0, e^{*3}(e_2) = 0, e^{*3}(e_3) = 1\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}e^{*1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= e^{*1}(xe_1 + ye_2 + ze_3) \\ &= xe^{*1}(e_1) + ye^{*1}(e_2) + ze^{*1}(e_3) \\ &= x.\end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $e^{*2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y$, mientras que $e^{*3}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z$. Esto es, $e^{*i} = \pi_i$ donde $\pi_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$, es la proyección a la i -ésima coordenada.

Ejemplo 1.1.5. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a \in U$, es decir $f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + r(h)$, donde $a+h \in U$ y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0.$$

Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ base canónica de $\mathbb{R}^n$ y sea $\{e^{*\alpha}\}_{\alpha=1}^n$ la base dual correspondiente de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Sabemos del cálculo diferencial que si $x = (x_1, \dots, x_n)$ entonces

$$\begin{aligned} df(a)(x) &= \langle \nabla f(a), x \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} x_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} e^{*i}(x). \end{aligned}$$

Además, tenemos que

$$df(a)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} dx_i(x),$$

es decir $e^{*i} = dx_i$, con $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 1.1.6. Sea V un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial. La función dada por

$$\begin{aligned} \phi: V &\longrightarrow V^{**} \\ x &\longmapsto \phi(x): V^* \longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \phi(x)(f) = f(x) \end{aligned}$$

es isomorfismo el cual no depende de la elección de las bases y es llamado isomorfismo natural.

Demostración. Veamos que ϕ es un isomorfismo. Primero veremos que la aplicación está bien definida. En efecto, sean $f, g \in V^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \phi(x)(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(x) \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x) \\ &= \alpha \phi(x)(f) + \beta \phi(x)(g) \end{aligned}$$

y así $\phi(x) \in L(V^*, \mathbb{K}) = V^{**}$. Ahora, con $f \in V^*$ arbitrario, $x, y \in V$ y para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\begin{aligned} \phi(\alpha x + \beta y)(f) &= f(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y) \\ &= \alpha \phi(x)(f) + \beta \phi(y)(f). \end{aligned}$$

Para ver que ϕ es inyectiva, supongamos $x \in \ker \phi$. Esto es $\phi(x) = 0$ de donde

$f(x) = 0, \forall f \in V^*$. Considerando $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ una base de V y dado que $e^{*\alpha} \in V^*$ entonces $e^{*\alpha}(x) = 0$, con $x = x^\beta e_\beta \in V$. Luego

$$\begin{aligned} e^{*\alpha}(x^\beta e_\beta) &= 0 \\ x^\alpha &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $x^\alpha = 0$, para $\alpha = 1, 2, \dots, n$, luego $x = 0$. Por lo que $\ker \phi = \{0\}$ y por lo tanto se tiene que ϕ es inyectiva.

Por otro lado, por el teorema de la dimensión, tenemos que

$$\dim(V) - \dim(\ker \phi) = \dim(\text{Im} \phi),$$

entonces $\dim(V) = \dim(\text{Im} \phi) = \dim(V^{**})$. Luego ϕ es biyectiva y note que este isomorfismo no depende de la elección de las bases. $\square$

Observación: sea $\mathcal{B}$ base de V y $\mathfrak{B}$ base del dual V^* , como V^{**} es el espacio dual de V^* , podemos hablar de la base dual $\tilde{\mathcal{B}} = \{e_\alpha\}$ en V^{**} y es fácil probar que $\phi(e_\alpha) = e_\alpha$. Del Teorema 1.1.6 se tiene $\phi(e_\alpha)(e^{*\beta}) = e^{*\beta}(e_\alpha) = \delta_\alpha^\beta$, donde por definición de la base dual

$$\begin{aligned} e_\alpha: V^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ e^{*\beta} &\mapsto e_\alpha(e^{*\beta}) = \delta_\alpha^\beta, \end{aligned}$$

además $e_\alpha(u_\beta e^{*\beta}) = u^\alpha$.

Notemos que los elementos de V se identifican de manera natural con su imagen en el bidual vía isomorfismo ϕ del teorema anterior. Sea $x \in V, \chi \in V^{**}$ tal que $\phi(x) = \chi$, si $e_\alpha \in V$ entonces $\phi(e_\alpha) = e_\alpha \in V^{**}$. Así, para $x = \gamma_i e_i$ se tiene $\chi = \phi(x) = \gamma_i e_i$. Luego

$$[x]_{\mathcal{B}} = [\chi]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}.$$

A continuación, generalizaremos la noción de función lineal para definir funciones multilineales de un producto cartesiano de espacios vectoriales.

Definición 1.1.7. Sean $V_1, V_2, \dots, V_p, V$ espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. La función

$$f: V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p \longrightarrow V$$

es p -lineal si verifica,

1. $f(x_1, \dots, x_i + x'_i, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_p)$
2. $f(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_p) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p)$

para cada $x_j \in V_j$ y para cada $x'_i \in V_i$ con $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$ y para $\lambda \in \mathbb{K}$.

El espacio vectorial de todas las funciones multilineales desde $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_p$ a V se denotará por $L(V_1, \dots, V_p; V)$.

En particular, si $V_i = V$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ entonces $L(\underbrace{V, V, \dots, V}_{p\text{-veces}}; V)$ se denota por $L^p(V, V)$. Si $f \in L^p(V, \mathbb{R})$ entonces f es llamada forma p -lineal sobre V .

Observación: $L^1(V, \mathbb{R}) = L(V, \mathbb{R}) = V^*$.

Ejemplo 1.1.8. Si definimos

$$\begin{aligned} f: V \times V^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, g) &\longmapsto g(x), \end{aligned}$$

se tiene que f es lineal en la primera componente por la linealidad de $g \in V^*$ y es lineal en la segunda componente debido a la definición de suma y producto por escalar de funciones.

Definición 1.1.9. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

1. El conjunto dado por

$$T_p(V) = \{f: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ es } p\text{-lineal} \}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, llamado espacio de los tensores p -veces covariantes sobre $\mathbb{K}$. A los elementos de $T_p(V)$ los llamaremos tensores del tipo $\binom{0}{p}$.

2. El conjunto dado por

$$T^q(V) = \{ \phi : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \phi \text{ es } q\text{-lineal} \}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, llamado espacio de los tensores q -veces contravariantes sobre $\mathbb{K}$. A los elementos de $T^q(V)$ los llamaremos tensores del tipo $\binom{q}{0}$.

3. El conjunto

$$T_p^q(V) = \{ \eta : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q\text{-veces}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \eta \text{ es } (p+q)\text{-lineal} \}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ llamado espacio de los tensores p -veces covariantes y q -veces contravariantes sobre $\mathbb{K}$. A los elementos de $T_p^q(V)$ los llamaremos tensores del tipo $\binom{q}{p}$.

Ejemplo 1.1.10. Sea V un espacio vectorial. Si se define

$$\begin{aligned} f : \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{p\text{-veces}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (g_1, \dots, g_p, x_1, \dots, x_p) &\mapsto g_1(x_1)g_2(x_2)\dots g_p(x_p), \end{aligned}$$

tal que sea lineal de manera independiente en cada coordenada, entonces $f \in T_p^p(V)$.

Observación:

- Sean $f_j \in V^*$ con $j = 1, 2, \dots, q$. Sea $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}$ base de V y sea $\mathcal{B}^* = \{e^{*\alpha}\}$ la base dual, además digamos $f_j = f_j(e_\alpha)e^{*\alpha}$. Si $\phi \in T^q(V)$, entonces

$$\phi(f_1(e_{\alpha_1})e^{*\alpha_1}, \dots, f_q(e_{\alpha_q})e^{*\alpha_q}) = f_1(e_{\alpha_1}) \dots f_q(e_{\alpha_q})\phi(e^{*\alpha_1}, \dots, e^{*\alpha_q}).$$

- Sean $G \in T_p^q(V)$, $f_j \in V^*$ con $j = 1, 2, \dots, q$ y sean $x_1, x_2, \dots, x_p \in V$. Digamos $f_j = f_j(e_{\alpha_j})e^{*\alpha_j}$ y $x_i = x_i^{\beta_i}e_{\beta_i}$, luego

$$\begin{aligned} G(f_1, \dots, f_q, x_1, x_2, \dots, x_p) &= G(f_1(e_{\alpha_1})e^{*\alpha_1}, \dots, f_q(e_{\alpha_q})e^{*\alpha_q}, x_1^{\beta_1}e_{\beta_1}, \dots, x_p^{\beta_p}e_{\beta_p}) \\ &= f_1(e_{\alpha_1}) \dots f_q(e_{\alpha_q})x_1^{\beta_1} \dots x_p^{\beta_p} G(e^{*\alpha_1}, \dots, e^{*\alpha_q}, e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_p}). \end{aligned}$$

1.1.2. El producto tensorial

Sobre diversos contextos de las matemáticas el producto tensorial se construye sobre módulos por medio de generadores y relaciones. En este caso, se define como una forma bilineal.

Definición 1.1.11. 1. Sea $f \in T_p(V)$ y $g \in T_q(V)$. Se define el producto tensorial de f y g como la función $p + q$ lineal

$$\begin{aligned} f \otimes g: \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{q\text{-veces}} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) &\mapsto f(x_1, \dots, x_p)g(y_1, \dots, y_q). \end{aligned}$$

2. Sea $\phi \in T^p(V)$ y $\varphi \in T^q(V)$. Se define el producto tensorial de ϕ y φ como la función $p + q$ lineal

$$\begin{aligned} \phi \otimes \varphi: \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{p\text{-veces}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q\text{-veces}} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q) &\mapsto \phi(f_1, \dots, f_p)\varphi(g_1, \dots, g_q). \end{aligned}$$

3. Sea $f \in T_p(V)$ y $\varphi \in T^q(V)$. Se define el producto tensorial de f y φ como la función $p + q$ lineal

$$\begin{aligned} f \otimes \varphi: \underbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}_{q\text{-veces}} \times \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{p\text{-veces}} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (h_1, \dots, h_q, x_1, \dots, x_p) &\mapsto f(x_1, \dots, x_p)\varphi(h_1, \dots, h_q). \end{aligned}$$

Generalizando esta definición,

Definición 1.1.12. Si $F \in T_l^k(V)$ y $G \in T_q^p(V)$ entonces $F \otimes G \in T_{l+q}^{k+p}(V)$ está dado por

$$\begin{aligned} F \otimes G(\omega_1, \dots, \omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+p}, v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{l+q}) \\ := F(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_l)G(\omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+p}, v_{l+1}, \dots, v_{l+q}), \end{aligned}$$

con $\omega_i \in V^*$ y $v_i \in V$.

Se sigue directamente de la definición que:

Teorema 1.1.13. 1. Si $f \in T_p(V)$ y $g \in T_q(V)$, entonces $f \otimes g \in T_{p+q}(V)$.

2. Si $\phi \in T^p(V)$ y $\varphi \in T^q(V)$, entonces $\phi \otimes \varphi \in T^{p+q}(V)$.

3. Si $f \in T_p(V)$ y $\varphi \in T^q(V)$, entonces $f \otimes \varphi \in T_p^q(V)$.

Observación: en general $f \otimes g \neq g \otimes f$, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.14. Sean $f = e^{*1} - e^{*2}$ y $g = 2e^{*1}$. Entonces

$$\begin{aligned} f \otimes g(e_1, e_2) &= ((e^{*1} - e^{*2}) \otimes 2e^{*1})(e_1, e_2) \\ &= ((e^{*1} - e^{*2})(e_1) 2e^{*1}(e_2)) \\ &= 2(e^{*1} - e^{*2})(e_1) e^{*1}(e_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que $g \otimes f(e_1, e_2) = -2$.

Directamente de la definición de producto tensorial y dado que las funciones son multilineales se tiene la siguiente propiedad (*ver [1]*).

Proposición 1.1.15. Sean $f, f' \in T_p(V)$, $g, g' \in T_r(V)$ y $h \in T_s(V)$, entonces

$$\begin{aligned} (f + f') \otimes g &= f \otimes g + f' \otimes g \\ (\lambda f) \otimes g &= f \otimes \lambda g = \lambda(f \otimes g) \\ f \otimes (g + g') &= f \otimes g + f \otimes g' \\ f \otimes (g \otimes h) &= (f \otimes g) \otimes h. \end{aligned}$$

Las propiedades anteriores también se cumplen para los tensores contravariantes y tensores mixtos.

Teorema 1.1.16. Sean $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ base de V y $\{e^{*\alpha}\}_{\alpha=1}^n$ la base dual asociada, entonces $\{e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}\}_{\alpha, \beta=1}^n$ es una base de $T_2(V)$ y por lo tanto $\dim T_2(V) = n^2$.

Demostración. Sabemos que $e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta} \in T_2(V)$, ya que $e^{*\alpha} \in T_1(V)$ y $e^{*\beta} \in T_1(V)$. Basta probar que $\{e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}\}$ es linealmente independiente y genera a $T_2(V)$.

Consideremos la combinación lineal dada por

$$\lambda_{\alpha\beta} e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta} = 0_{\mathbb{K}} \in T_2(V),$$

así, para i, j fijos con $1 \leq i, j < n$ tenemos

$$\lambda_{\alpha\beta} e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}(e_i, e_j) = 0_{\mathbb{K}}(e_i, e_j) \in T_2(V),$$

es decir $\lambda_{ij} = 0(e_i, e_j)$, así $\lambda_{ij} = 0$ para $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces $\{e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}\}$ es linealmente independiente.

Veamos ahora que $\{e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}\}$ genera a $T_2(V)$. Sea $f \in T_2(V)$, veamos que

$$f = f(e_\alpha, e_\beta) e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}.$$

Sea $(u_1, u_2) \in V \times V$ con $u_i = u_i^\beta e_\beta$, entonces

$$\begin{aligned} f(e_\alpha, e_\beta) e^{*\alpha} \otimes e^{*\beta}(u_1, u_2) &= f(e_\alpha, e_\beta) e^{*\alpha}(u_1) e^{*\beta}(u_2) \\ &= f(e_\alpha, e_\beta) u_1^\alpha u_2^\beta \\ &= f(u_1^\alpha e_\alpha, u_2^\beta e_\beta) \\ &= f(u_1, u_2). \end{aligned}$$

□

Observación: en general se puede probar que

1. Si $\{e_\alpha\}$ es base de V y $\{e^{*\alpha}\}$ es base dual asociada, entonces

- a) $\{e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_p}\}_{i_1, \dots, i_p=1, \dots, n}$ es una base de $T_p(V)$
- b) $\dim T_p(V) = n^p$
- c) Si $f \in T_p(V)$ se tiene que $f = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_p}$.

2. Si $\{e^{*\alpha}\}$ es base dual de V^* y $\{e_\alpha\}$ es base bidual de V^{**} , entonces

- a) $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}\}_{i_1, \dots, i_q=1, \dots, n}$ es una base de $T^q(V)$
- b) $\dim T^q(V) = n^q$
- c) Si $\phi \in T^q(V)$ se tiene que $\phi = \phi(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_q}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$.

3. Si $\{e_\alpha\}$ es base de V , $\{e^{*\alpha}\}$ es base dual asociada y $\{e_\alpha\}$ es base bidual, respectivamente, entonces

a) $\{e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}\}$ es una base de $T_p^q(V)$

b) $\dim T_p^q(V) = n^{p+q}$

c) Si $G \in T_p^q(V)$ se tiene que

$$G = G(e^{*j_1}, \dots, e^{*j_q}, e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q} \otimes e^{*i_1} \otimes \dots \otimes e^{*i_p}.$$

1.1.3. El problema de cambio de base

Para realizar una transformación de coordenadas (cambio de base) para elementos expresados en diferentes bases de un mismo espacio vectorial, consideremos lo siguiente:

Sean $\mathcal{B} = \{e_\alpha\}$, $\mathcal{C} = \{b_\beta\}$ bases del espacio vectorial V y $\mathfrak{B} = \{e^{*\alpha}\}$, $\mathfrak{C} = \{b^{*\beta}\}$ las respectivas bases duales. Si sabemos como se relacionan las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, la pregunta natural es, ¿cómo se relacionan $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{C}$?

Sea $f \in V^*$, entonces podemos escribir $f = f(e_\alpha)e^{*\alpha}$ y $f = f(b_\beta)b^{*\beta}$. Como $\{b^{*\beta}\}$ es la base dual asociada a b_β , entonces

$$e^{*\alpha} = e^{*\alpha}(b_\beta)b^{*\beta}, \quad (1.1)$$

además como $b_\beta \in V$ y $\{e_\alpha\}$ es base de V , entonces existen $\eta_\beta^1, \eta_\beta^2, \dots, \eta_\beta^n \in \mathbb{K}$ tal que los elementos de la base $\{b_\beta\}$ los podemos expresar en términos de la base $\{e_\alpha\}$ por

$$\begin{aligned} b_\beta &= \eta_\beta^1 e_1 + \eta_\beta^2 e_2 + \dots + \eta_\beta^n e_n \\ &= \eta_\beta^\sigma e_\sigma. \end{aligned}$$

Así reemplazando esta última expresión en la ecuación (1.1) se tiene

$$\begin{aligned} e^{*\alpha} &= e^{*\alpha}(\eta_\beta^\sigma e_\sigma)b^{*\beta} \\ &= \eta_\beta^\alpha b^{*\beta}. \end{aligned}$$

Dado que la representación en una base es única, y debido a la linealidad de f se tiene que

$$f(b_\beta) = f(e_\alpha)\eta_\beta^\alpha,$$

lo que nos indica que al conocer ciertas propiedades con respecto a las bases es posible escribir un mismo elemento en ambas bases, estas características son de vital importancia a la hora evadir grandes cálculos dentro de un sistemas coordenado específico.

Si $b_\beta = \eta_\beta^\sigma e_\sigma$ entonces $e^{*\alpha} = \eta_\beta^\alpha b^{*\beta}$. Así la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (\eta_\beta^\alpha)_{n \times n}$, donde $b_1 = \eta_1^1 e_1 + \dots + \eta_1^n e_n$, es decir

$$= \begin{pmatrix} \eta_1^1 & \eta_1^2 & \dots & \eta_1^n \\ \eta_2^1 & \eta_2^2 & \dots & \eta_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_n^1 & \eta_n^2 & \dots & \eta_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Luego $e^{*1} = \eta_1^1 b^{*1} + \eta_2^1 b^{*2} + \dots + \eta_n^1 b^{*n}$, $e^{*2} = \eta_1^2 b^{*1} + \eta_2^2 b^{*2} + \dots + \eta_n^2 b^{*n}$, etc. Matricialmente

$$= \begin{pmatrix} \eta_1^1 & \eta_1^2 & \dots & \eta_1^n \\ \eta_2^1 & \eta_2^2 & \dots & \eta_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_n^1 & \eta_n^2 & \dots & \eta_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{*1} \\ b^{*2} \\ \vdots \\ b^{*n} \end{pmatrix}.$$

Así la matriz de cambio de base dual $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (\eta_\beta^\alpha)^T$ y $[I]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left((\eta_\beta^\alpha)^T\right)^{-1}$.

Ejemplo 1.1.17. Sea $f \in T_2(V)$ y $x_1, x_2 \in V$ son dados por $x_1 = x_1^\alpha e_\alpha$ y $x_2 = x_2^\alpha e_\alpha$. Entonces

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_1^\alpha e_\alpha, x_2^\beta e_\beta) \\ &= x_1^\alpha x_2^\beta f(e_\alpha, e_\beta). \end{aligned}$$

Esta última expresión la podemos expresar en su forma matricial si expandimos los in-

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & x_1^1 x_2^1 f(e_1, e_1) + x_1^1 x_2^2 f(e_1, e_2) + \dots + x_1^1 x_2^n f(e_1, e_n) + \\ & x_1^2 x_2^1 f(e_2, e_1) + x_1^2 x_2^2 f(e_2, e_2) + \dots + x_1^2 x_2^n f(e_2, e_n) + \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ & x_1^n x_2^1 f(e_n, e_1) + x_1^n x_2^2 f(e_n, e_2) + \dots + x_1^n x_2^n f(e_n, e_n), \end{aligned}$$
$$f(x_1, x_2) = x_1^1(x_2^{i_1} f(e_1, e_{i_1})) + x_2^2(x_2^{i_2} f(e_2, e_{i_2})) + \dots + x_1^n(x_2^{i_n} f(e_n, e_{i_n})).$$
$$f(x_1, x_2) = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \begin{pmatrix} x_2^\sigma f(e_1, e_\sigma) \\ x_2^\sigma f(e_2, e_\sigma) \\ \vdots \\ x_2^\sigma f(e_n, e_\sigma) \end{pmatrix}$$
$$f(x_1, x_2) = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n) \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \dots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \dots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \dots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_2^n \end{pmatrix},$$
$$f(x_1, x_2) = x_1^\alpha f(e_\alpha, e_\beta) x_2^\beta.$$
$$f(b_i, b_j) = \eta_i^\tau \eta_j^\sigma f(e_\tau, e_\sigma).$$

En general, si $\{e_\alpha\}$ y $\{b_\beta\}$ son bases de V mientras que $\{e^{*\alpha}\}$ y $\{b^{*\beta}\}$ son las bases

duales asociadas, si se tiene que

$$\begin{aligned} b_{j_1} &= \eta_{j_1}^{i_1} e_{i_1}, \\ b_{j_2} &= \eta_{j_2}^{i_2} e_{i_2}, \\ &\vdots \\ b_{j_p} &= \eta_{j_p}^{i_p} e_{i_p}, \end{aligned}$$

y $f \in T_p(V)$, entonces

$$\begin{aligned} f(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_p}) &= f(\eta_{j_1}^{i_1} e_{i_1}, \eta_{j_2}^{i_2} e_{i_2}, \dots, \eta_{j_p}^{i_p} e_{i_p}) \\ &= \eta_{j_1}^{i_1} \eta_{j_2}^{i_2} \dots \eta_{j_p}^{i_p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}). \end{aligned}$$

Por otro lado, si consideramos

$$\begin{aligned} b^{*k_1} &= \rho_{\alpha_1}^{k_1} e^{*\alpha_1}, \\ b^{*k_2} &= \rho_{\alpha_2}^{k_2} e^{*\alpha_2}, \\ &\vdots \\ b^{*k_q} &= \rho_{\alpha_q}^{k_q} e^{*\alpha_q}, \end{aligned}$$

y $\psi \in T^q(V)$ entonces

$$\psi(b^{*k_1}, b^{*k_2}, \dots, b^{*k_q}) = \rho_{\alpha_1}^{k_1} \rho_{\alpha_2}^{k_2} \dots \rho_{\alpha_q}^{k_q} \psi(e^{*\alpha_1}, e^{*\alpha_2}, \dots, e^{*\alpha_q}).$$

Mientras que para $G \in T_p^q(V)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} G(b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_p}, b^{*k_1}, b^{*k_2}, \dots, b^{*k_q}) &= \\ \eta_{j_1}^{i_1} \eta_{j_2}^{i_2} \dots \eta_{j_p}^{i_p} \rho_{\alpha_1}^{k_1} \rho_{\alpha_2}^{k_2} \dots \rho_{\alpha_q}^{k_q} G(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e^{*\alpha_1}, \dots, e^{*\alpha_q}). \end{aligned}$$

1.1.4. Tensores desde un punto de vista físico-geométrico

Sean $(x^1, \dots, x^n)$ y $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ las coordenadas de un mismo punto en dos sistemas de coordenadas. Supongamos que existen para $k = 1, 2, \dots, n$ relaciones independientes entre las coordenadas anteriores

$$\bar{x}^k = \bar{x}^k(x^1, \dots, x^n).$$

Todas las funciones se suponen continuas y con derivadas continuas. A cada coordenada $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ en un sistema le corresponde una única coordenada $(x^1, \dots, x^n)$ en el otro sistema, de manera que

$$x^k = x^k(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$.

Las relaciones anteriores definen fórmulas de transformación de coordenadas de un sistema de coordenadas a otro.

Definición 1.1.18. *Todas las funciones se suponen continuas y con derivadas continuas.*

1. *Supongamos que tenemos n -funciones escalares A^α en un sistema de coordenadas relacionadas con otras n -funciones escalares $\bar{A}^i$ en otro sistema de coordenadas para $i = 1, 2, \dots, n$ por medio de la regla de transformación convenida anteriormente, es decir*

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

diremos que A^α determinan las componentes de un tensor una vez contravariante o tensor contravariante de primer orden.

2. *De manera análoga si tenemos n -funciones A_α en un sistema de coordenadas relacionadas con otras n -funciones $\bar{A}_i$ en otro sistema de coordenadas con $i = 1, 2, \dots, n$ por medio de la regla de transformación convenida*

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} A_\alpha \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

diremos que A_α determinan las componentes de un tensor una vez covariante o un tensor covariante de primer orden.

Definición 1.1.19. 1. Supongamos que tenemos n^2 funciones escalares $A^{\alpha\beta}$ donde $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si podemos obtener otras n^2 funciones escalares $\bar{A}^{ij}$ mediante la transformación

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

diremos que $A^{\alpha\beta}$ son los componentes de un tensor dos veces contravariante o también llamado tensor contravariante de segundo orden.

2. Supongamos que tenemos n^2 funciones escalares $A_{\alpha\beta}$ donde $\alpha, \beta \in \{1, 2, \dots, n\}$. Si podemos obtener otras n^2 funciones escalares $\bar{A}_{ij}$ mediante la transformación

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} A_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

diremos que $A_{\alpha\beta}$ son los componentes de un tensor dos veces covariante o también llamado tensor covariante de segundo orden.

Definición 1.1.20. Supongamos que tenemos n^{p+q} funciones escalares $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_q}$ donde $1 \leq \beta_i, \alpha_j \leq n$, para $1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq p$. Si podemos obtener otras n^{p+q} funciones escalares $\bar{A}_{i_1i_2\dots i_p}^{j_1j_2\dots j_q}$ mediante la transformación

$$\bar{A}_{i_1i_2\dots i_p}^{j_1j_2\dots j_q} = \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \frac{\partial x^{\alpha_2}}{\partial \bar{x}^{i_2}} \cdots \frac{\partial x^{\alpha_p}}{\partial \bar{x}^{i_p}} \frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial \bar{x}^{j_2}}{\partial x^{\beta_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{j_q}}{\partial x^{\beta_q}} A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_q},$$

diremos que $A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p}^{\beta_1\beta_2\dots\beta_q}$ son los componentes de un tensor q -veces contravariante y p -veces covariante.

1.1.5. Equivalencia entre las dos definiciones de tensores.

Supongamos que tenemos $T \in T_1^1(\mathbb{R}^n)$ y una transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} \phi: \quad U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n \\ (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n) &\mapsto (x^1, x^2, \dots, x^n), \end{aligned}$$

donde U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$, así $x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^n)$ donde $i = 1, 2, \dots, n$. Además, supongamos $\{e_i\}_{i=1}^n$, $\{b_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $\{e^{*\alpha}\}$, $\{b^{*\beta}\}$ las respectivas bases duales. Denotemos

$$T_i^j = T(e^{*j}, e_i) \quad \text{y} \quad T_\alpha^\beta = T(b^{*\beta}, b_\alpha). \quad (1.2)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} T &= T(e^{*j}, e_i) e^{*i} \otimes e_j \\ &= T_i^j e^{*i} \otimes e_j. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por otro lado, como en Ejemplo 1.1.5 denotaremos

$$e^{*i} = d\bar{x}^i, \quad b^{*\beta} = dx^\beta, \quad d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad y \quad dx^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j,$$

entonces de la ecuación (1.2) y (1.3) se tiene

$$\begin{aligned} T_\alpha^\beta &= T(b^{*\beta}, b_\alpha) \\ &= T_i^j e^{*i} \otimes e_j(b^{*\beta}, b_\alpha) \\ &= T_i^j d\bar{x}^i \otimes e_j(dx^\beta, b_\alpha) \\ &= T_i^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \otimes e_j\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j, b_\alpha\right) \\ &= T_i^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} b^{*\alpha} \otimes e_j\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} e^{*j}, b_\alpha\right) \\ &= T_i^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} e_j(e^{*j}) b^{*\alpha}(b_\alpha) \\ &= T_i^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}, \end{aligned}$$

es decir,

$$T_\alpha^\beta = T_i^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}.$$

Esto significa que todo tensor de tipo (1, 1) desde el punto de vista algebraico da origen a un tensor desde un punto de vista físico-geométrico y viceversa.

Análogamente se tiene el caso general.

1.1.6. Espacios de tensores

Definimos $T_0^k(V) = T^k(V)$ y $T_l^0(V) = T_l(V)$, Mientras que $T^0(V) = \mathbb{R}$, $T_1(V) = V^*$, $T^1(V) = V^{**} \cong V$. Además, por ser V de dimensión finita, como probaremos en la siguiente proposición $T_1^1(V) \cong \text{End}(V)$.

Proposición 1.1.21. Sea $\phi : V \longrightarrow V$ lineal, entonces la función $f : \text{End}(V) \longrightarrow T_1^1(V)$ definida por

$$\begin{aligned} f(\phi) : V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, v) &\longmapsto \omega(\phi(v)) \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Demostración. Sea $\{e_\alpha\}$ una base de V y $\{e^{*\alpha}\}$ la base de V^* . Notemos que f es lineal debido a la linealidad de ω .

Para probar la sobreyectividad, sea $T \in T_1^1(V)$ digamos $T = T_\beta^\alpha e_\alpha \otimes e^{*\beta}$. Queremos hallar $\phi \in \text{End}(V)$ tal que $f(\phi) = T$. Consideremos $\phi \in \text{End}(V)$ tal que ϕ tiene matriz de representación T_β^α . Si $x = x^\alpha e_\alpha$ y $\omega = \omega(e_\alpha) e^{*\alpha}$, se tiene

$$\begin{aligned} f(\phi)(\omega, x) &= \omega(\phi(x)) \\ &= \omega(e_k) e^{*k} (T_j^i x^j e_i) \\ &= T_j^i x^j \omega(e_k) e^{*k}(e_i) \\ &= T_j^i x^j \omega(e_k) \delta_i^k \\ &= T_j^k x^j \omega(e_k). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T(\omega, x) &= T(\omega(e_\alpha) e^{*\alpha}, x^i e_i) \\ &= \omega(e_\alpha) x^i T(e^{*\alpha}, e_i) \\ &= T_i^\alpha x^i \omega(e_\alpha). \end{aligned}$$

Dado que x y ω eran arbitrarios, y con $i = j$ y $\alpha = k$ se sigue que $f(\phi) = T$. Así f es lineal y sobreyectiva, donde la inyectividad se sigue del teorema de la dimensión, por lo tanto es un isomorfismo. $\square$

Generalizando la proposición anterior, enunciaremos lo siguiente

Lema 1.1.22. Existe un isomorfismo natural entre $T_{l+1}^k(V)$ y el espacio de funciones definido por

$$\{\phi : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l\text{-veces}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{k\text{-veces}} \longrightarrow V \mid \phi \text{ es multilineal}\}.$$

Así una base de $T_l^k(V)$ es

$$\{e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_l} \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\},$$

con $(j_1, \dots, j_l), (i_1, \dots, i_k) \in S_n$, donde S_n denota el grupo de permutaciones de n elementos.

Un tensor $F \in T_l^k(V)$ se puede escribir como

$$F = F_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_l} \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k},$$

donde

$$F_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} = F(e^{*i_1}, \dots, e^{*i_k}, e_{j_1}, \dots, e_{j_l})$$

por lo que

$$F(\omega_1, \dots, \omega_k, v_1, \dots, v_l) = F_{j_1 j_2 \dots j_l}^{i_1 i_2 \dots i_k} e^{*j_1}(v_1) \dots e^{*j_l}(v_l) e_{i_1}(\omega_1) \dots e_{i_k}(\omega_k),$$

donde $e_{j_r}(\omega_r) = \omega_r(e_{j_r}) = e_{j_r}(\omega_r)$.

Definición 1.1.23 (Contracción). *La transformación lineal $Tr : T_1^1(V) \longrightarrow T_0^0(V) \cong \mathbb{R}$ definida por $Tr(T) = T_i^i$ donde $T = T_j^i e_i \otimes e^{*j}$, es llamada Traza del tensor T respecto de su base asociada.*

Más generalmente, si $F \in T_l^k(V)$ digamos

$$F = F_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k} e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_l} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k},$$

tenemos la contracción del l -ésimo índice covariante j_l y del primer índice contravariante i_1

$$Tr(F) = F_{j_1 \dots m}^{m \dots i_k} e^{*j_1} \otimes \dots \otimes e^{*j_{l-1}} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k},$$

con $Tr(F) \in T_{l-1}^{k-1}(V)$.

En general si T tiene coeficientes $T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$ entonces $Tr(T)$ tiene coeficientes $T_{j_1 \dots j_{l-1} m}^{m i_2 \dots i_{k-1}}$. En otras palabras, cuando se tiene un tensor mixto de orden mayor o igual a 2 y se

igual a 1 superíndice con un subíndice, se debe sumar respecto de dicho índice según el convenio de Einstein. De este modo, se reduce 1 orden el índice de covarianza y 1 orden el índice de contravarianza respecto del tensor original. A esta aplicación la llamaremos **contracción de un tensor**.

Definición 1.1.24. Sea $\phi \in T_l(V)$. El tensor ϕ es llamado *simétrico* si para cada $v_1, \dots, v_l \in V$ y para cada $\sigma \in S_l$ se tiene

$$\phi(v_1, \dots, v_l) = \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}).$$

El tensor ϕ es llamado *antisimétrico* si para cada $v_1, \dots, v_l \in V$ y para cada $\sigma \in S_l$ se tiene

$$\phi(v_1, \dots, v_l) = \text{sgn}(\sigma)\phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(l)}),$$

donde $\text{sgn}(\sigma) = 1$ si la permutación es par, y $\text{sgn}(\sigma) = -1$ si la permutación es impar.

Por ejemplo, si el tensor T de coeficientes T_{ab} es simétrico entonces $T_{ab} = T_{ba}$. Mientras que si T es antisimétrico entonces $T_{ab} = -T_{ba}$.

1.2. Variedades diferenciables y espacios tangente

La teoría de variedades permite estudiar objetos no euclidianos pero que localmente son homeomorfos a $\mathbb{R}^n$, lo que nos permite usar herramientas del análisis en forma local. Los ejemplos más familiares, además de los propios espacios euclidianos, son curvas planas suaves como círculos y parábolas, también superficies suaves como esferas, toros, paraboloides, elipsoides e hiperboloides.

Para mayor detalle de lo que veremos en esta sección, ver [9].

Definición 1.2.1. Una carta o sistema de coordenadas m -dimensionales en un espacio métrico M es un par (U, ϕ) , donde $U \subseteq M$ y $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

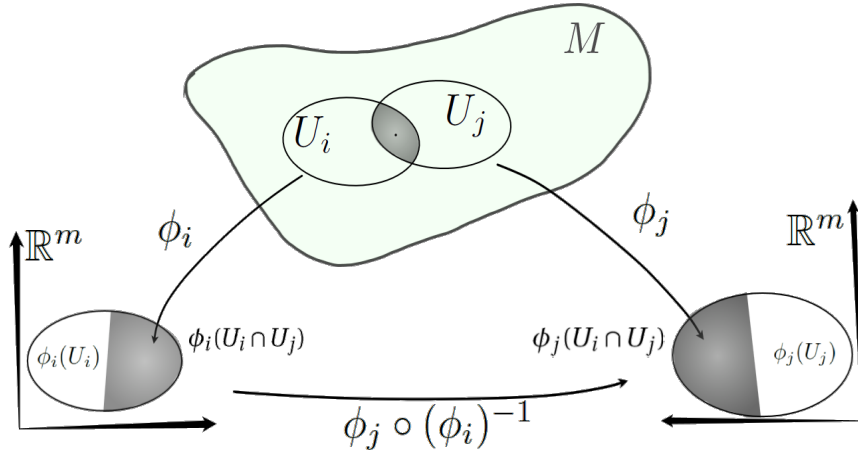
Definición 1.2.2. Un Atlas m -dimensional de clase C^k con $k \geq 1$ sobre un espacio métrico M es una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de cartas de M tales que:

1. $M = \bigcup_{i \in I} U_i$
2. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ con $i, j \in I$, entonces el llamado cambio de coordenadas

$$\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}: \phi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^m$$

es un difeomorfismo entre los abiertos $\phi_i(U_i \cap U_j)$ y $\phi_j(U_i \cap U_j)$ de $\mathbb{R}^m$.

Definición 1.2.3. Diremos que M es una variedad diferenciable m -dimensional si el atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}$ es maximal respecto a las condiciones 1 y 2 de la definición anterior.



Observación: de la condición **2.** de la Definición 1.2.2 se dice que las cartas (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son compatibles.

Nos referiremos a atlas maximal como maximal en el sentido que contiene todas las posibles cartas compatibles. Es decir, si (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) son compatibles entonces están contenidas en el mismo atlas maximal, el cual dota a la variedad de una estructura diferenciable.

Ejemplo 1.2.4. 1. **Espacios euclidianos:** Para cada número entero no negativo n , el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es una variedad n -dimensional diferenciable con la estructura diferenciable determinada por el atlas que consta de la única carta $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$. A esto lo llamamos la estructura diferenciable estándar sobre $\mathbb{R}^n$ y a las cartas coordenadas las llamamos coordenadas estándar. A menos que especifiquemos explícitamente lo contrario, siempre usaremos esta estructura diferenciable sobre $\mathbb{R}^n$. Con respecto a esta estructura, las cartas de coordenadas diferenciables para $\mathbb{R}^n$ son exactamente aquellas cartas (U, ϕ) tales que ϕ es un difeomorfismo desde U a otro subconjunto abierto $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. **Espacios vectoriales de dimensión finita:** Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Si V es un espacio métrico, la distancia permite determinar una topología en V . Así, V es una variedad topológica de dimensión finita y tendrá una estructura diferenciable natural definida como sigue. Cada base ordenada $\{e_1, \dots, e_n\}$ para V define un isomorfismo de base $e: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ definido por $e(x) = x^i e_i$. Es fácil comprobar que es homeomorfismo, entonces (V, e^{-1}) es una carta. Si $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ es otra base y $\tilde{e}(x) = x^j \tilde{e}_j$ es el isomorfismo correspondiente, entonces existe una matriz invertible (A_i^j) tal que $e_i = A_i^j \tilde{e}_j$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. El cambio de coordenadas entre dos cartas está dado por $\tilde{e}^{-1} \circ e(x) = \tilde{x}$, donde $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)$ está determinado por

$$\tilde{x}^j \tilde{e}_j = x^i e_i = x^i A_i^j \tilde{e}_j.$$

Se sigue que $\tilde{x}^j = A_i^j x^i$, por lo tanto, la función que envía x a $\tilde{x}$ es un funcional lineal invertible y, por lo tanto, un difeomorfismo, por lo que dos de estas cartas son compatibles. La colección de todas estas cartas define así una estructura diferenciable, denominada estructura diferenciable estándar sobre V .

Observación: Una variedad pueden tener estructuras diferenciables diferentes. Esto es, dos cartas coordenadas que doten de una estructura diferenciable a la variedad M pero que no verifican ser compatibles, dotarán de estructuras diferenciables distintas a la misma variedad M .

Por ejemplo, considere el homeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dado por $\psi(x) = x^3$. El atlas que consta de la única carta $(\mathbb{R}, \psi)$ define una estructura diferenciable en $\mathbb{R}$. Sin embargo, esta carta no es compatible con la estructura estándar dotada por $(\mathbb{R}, Id_{\mathbb{R}})$, porque el cambio de coordenadas $(Id_{\mathbb{R}} \circ \psi^{-1})(y) = y^{\frac{1}{3}}$ no es diferenciable en el origen. Por lo tanto, la estructura diferenciable definida en $\mathbb{R}$ por ψ no es la misma que la estándar. Usando ideas similares, no es difícil construir muchas estructuras diferenciables distintas en cualquier variedad de dimensión positiva, siempre que tenga una estructura diferenciable inicial dada.

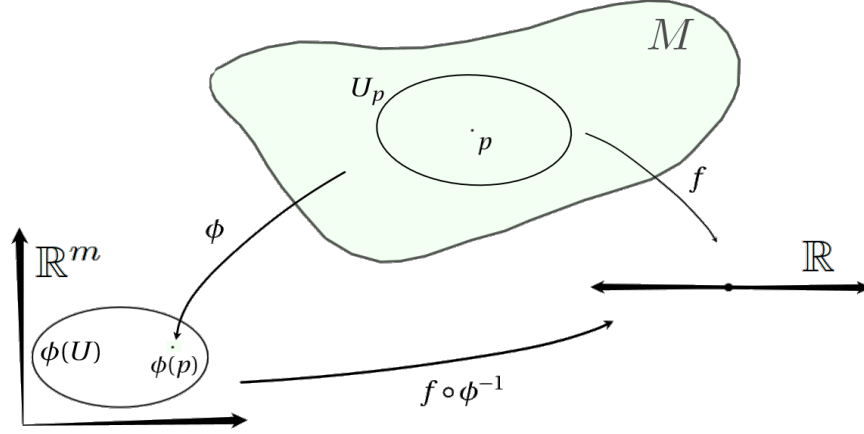
Definición 1.2.5. *Un Atlas en M se dice orientado si para cualquier par de cartas (U_i, ϕ_i) y (U_j, ϕ_j) se tiene $U_i \cap U_j = \emptyset$ o bien, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces*

$$\det [J(\phi_j \circ (\phi_i)^{-1})(\phi_i(x))] > 0, \quad \text{para todo } x \in U_i \cap U_j.$$

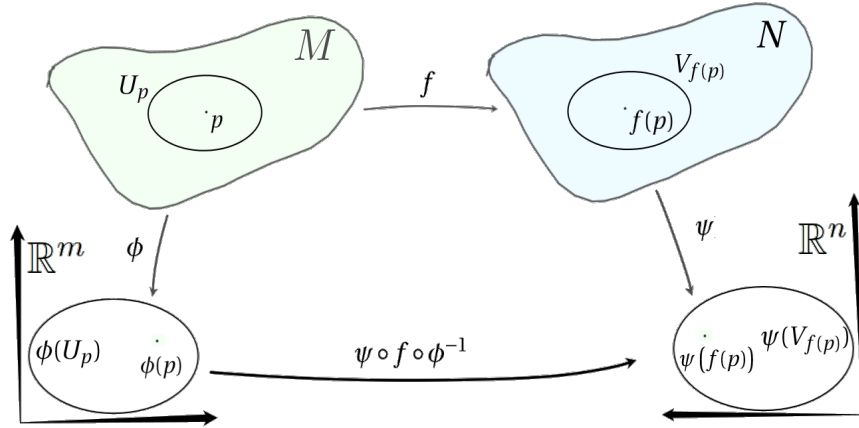
Definición 1.2.6. *Una variedad M se dice orientable si M tiene un Atlas orientado.*

Definición 1.2.7. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, donde M es una variedad m -dimensional de clase C^k con $k \leq \infty$. Diremos que f es diferenciable en $p \in M$ si existe una carta (U_p, ϕ) en el atlas, con $p \in U_p$ tal que $f \circ \phi^{-1} : \phi(U_p) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\phi(p) \in \mathbb{R}^m$.*

Diremos que f es diferenciable si lo es en punto de M .



Definición 1.2.8. Sea $f : M \longrightarrow N$ una función entre dos variedades de dimension m y n , respectivamente. Diremos que f es diferenciable en $p \in M$ si existen cartas (U_p, ϕ) y $(V_{f(p)}, \psi)$ en los atlas de M y N respectivamente, tal que $f(U_p) \subseteq V_{f(p)}$ y $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U_p) \longrightarrow \psi(V_{f(p)})$ es diferenciable en $\phi(p)$.



Diremos que f es diferenciable si lo es en todo punto de M .

Notación: definimos la familia de las funciones suaves y escalares sobre la variedad M como $\mathfrak{T}(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es de clase } C^\infty\}$

Definición 1.2.9. *Un vector tangente a M en p es una función $X_p : \mathfrak{T}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $f, g \in \mathfrak{T}(M)$ y para todo $r \in \mathbb{R}$ se verifica:*

- i. $X_p(f + g) = X_p(f) + X_p(g)$
- ii. $X_p(rf) = rX_p(f)$
- iii. $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + g(p)X_p(f)$.

Donde fg es el producto de funciones y $f(p)X_p(g)$ es el producto de los reales $f(p)$ y $X_p(g)$ respectivamente.

Observación: mostraremos que esta definición generaliza la definición de planos tangentes definidos sobre superficies en $\mathbb{R}^n$, en el sentido que existe una correspondencia biunívoca con el vector tangente de la definición clásica de $\mathbb{R}^n$. Veremos que el conjunto de X_p es espacio vectorial.

Proposición 1.2.10. *Sea X_p un vector tangente en $p \in M$. Si $\gamma : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es función constante $\gamma(m) \equiv r$, con $r \in \mathbb{R}$, entonces $X_p(\gamma) = 0$.*

Ejemplo 1.2.11. *Sea $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ una curva diferenciable en M con $\alpha(0) = p$. Se define $X_p^\alpha : \mathfrak{T}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $X_p^\alpha(f) = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}$. Veamos que X_p^α es vector tangente a M en p .*

Sean $f, g \in \mathfrak{T}(M)$ y $r \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned} X_p^\alpha(f + g) &= \left. \frac{d((f + g) \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d((f \circ \alpha) + (g \circ \alpha))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{d(g \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= X_p^\alpha(f) + X_p^\alpha(g). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
 X_p^\alpha(rf) &= \left. \frac{d((rf) \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d(r(f \circ \alpha))}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= r \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= r X_p^\alpha(f).
 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 X_p^\alpha(fg) &= \left. \frac{d((fg) \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \left. \frac{d((f \circ \alpha)(g \circ \alpha))}{dt} \right|_{t=0} \\
 &= \left(\left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \right) g(\alpha(0)) + f(\alpha(0)) \left(\left. \frac{d(g \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} \right) \\
 &= X_p^\alpha(f)g(p) + X_p^\alpha(g)f(p).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto X_p^α es vector tangente a M en p .

Si M es una variedad diferenciable con (U, ϕ) carta, se tiene que ϕ es difeomorfismo de U a $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$. Como veremos en la **sección 1.4.1**, se tiene que el diferencial $\phi_{*p} : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Luego, las derivadas $\left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_{\phi(p)}, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^m} \right|_{\phi(p)}$ forman una base de $T_{\phi(p)} \mathbb{R}^m$, por lo tanto las preimágenes de estos valores bajo el isomorfismo ϕ_{*p} forman una base de $T_p M$. Usaremos la notación estándar $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ para estos vectores. Se puede probar que $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ es un vector tangente. Lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.2.12. Sea (U, ϕ) una carta alrededor de $p \in M$ y sean $u^1, \dots, u^n$ coordenadas en $\mathbb{R}^n$. Entonces $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$ es el vector tangente a M en p dado por

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (f) = \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial u^i} (\phi(p)).$$

Este vector depende de la carta (U, ϕ) a usar.

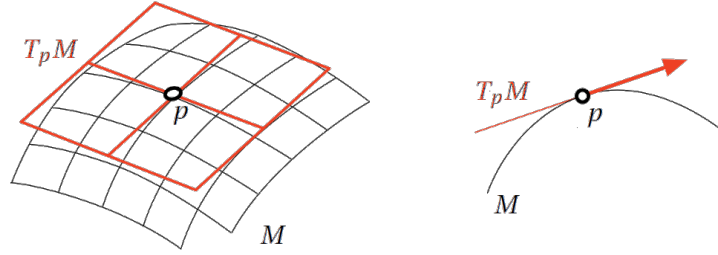
Definición 1.2.13. La i -ésima función coordenada (local) sobre M con respecto a la carta (U, ϕ) es la función

$$\begin{aligned} x^i : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto x^i(p) = u^i(\phi(p)). \end{aligned}$$

Observación: en particular, notemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (x^j) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p (u^j \circ \phi)(p) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right) (u^j \circ \phi \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \\ &= \left(\frac{\partial u^j}{\partial u^i} \right) (\phi(p)) \\ &= \delta_j^i. \end{aligned}$$

Definición 1.2.14. El espacio tangente a M en p denotado por $T_p M$, es el conjunto de todos los vectores tangentes a M en p .



Teorema 1.2.15. $T_p M$ es un espacio vectorial.

Lema 1.2.16. Si $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k y $(a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$, entonces existen funciones h_{ij} de clase C^{k-2} tales que

$$F(u^1, \dots, u^n) = F(a^1, \dots, a^n) + \sum \frac{\partial F}{\partial u^i}(a^1, \dots, a^n)(u^i - a^i) \\ + \sum h_{ij}(u^1, \dots, u^n)(u^i - a^i)(u^j - a^j).$$

Resultado obtenido del Teorema de Taylor con residuo, el cual permite probar el siguiente enunciado

Teorema 1.2.17. Sea (U, ϕ) una carta con $p \in U$, entonces $\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}_{i=1}^n$ es base para $T_p M$ y además $X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$.

Observación: Si M es una variedad n -dimensional con carta (U, ϕ) , sabemos que el espacio tangente $T_p M$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}_{i=1}^n$ tal que para $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene el vector tangente $V_p = v^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$.

Para ver que $T_p M$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$, se define la función

$$\begin{aligned} \xi: T_p M &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ V_p &\longmapsto \xi(V_p) := (v^1, \dots, v^n), \end{aligned}$$

que a cada vector tangente $V_p \in T_p M$ le asigna su vector coordenada $[v]_{\mathcal{B}}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$. Para ver que ξ es transformación lineal se consideran $V_p, W_p \in T_p M$ y $r \in \mathbb{R}$ tales que verifican

$$\begin{aligned} \xi(V_p + rW_p) &= \xi \left(v^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p + r w^i(p) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) \\ &= \xi \left(\left(v^i(p) + r w^i(p) \right) \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \right) \\ &= (v^1 + r w^1, \dots, v^n + r w^n) \\ &= (v^1, \dots, v^n) + r(w^1, \dots, w^n) \\ &= \xi(V_p) + r\xi(W_p). \end{aligned}$$

Para probar la inyectividad, supongamos $V_p \in \ker(\xi)$, entonces $0 = \xi(V_p) = [v]_{\mathcal{B}}$. Así $v = 0 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p + \dots + 0 \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p = 0$, luego $\ker(\xi) = 0$ y por lo tanto ξ es inyectiva. Por otro lado, ξ es sobreyectiva por el teorema de la dimensión y así ξ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Dado que $T_p M$ es un espacio vectorial, podemos definir su dual.

Definición 1.2.18. *El espacio cotangente a M en p es $T_p^* M = (T_p M)^*$.*

Notación: sea $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ carta alrededor de $p \in M$ y $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}$ la base de $T_p M$ asociada a estas coordenadas. Denotaremos por $\{(dx^i)_p\}$ a la base dual, y por lo tanto

$$(dx^i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_p \right) = \delta_j^i.$$

1.3. Fibrados vectoriales

Para definir formalmente los importantes conceptos de campo vectorial, métrica riemanniana, métrica pseudoriemanniana, entre otros, es necesario introducir las nociones de fibrado vectorial, fibra, fibrado tangente, sección y fibrados tensoriales.

Definición 1.3.1. *Un fibrado vectorial es una tripleta (E, M, π) con E y M variedades y π una función suave y sobreyectiva $\pi : E \longrightarrow M$ tal que:*

1. $E_p = \pi^{-1}(p)$ es un espacio vectorial para todo $p \in M$.
 E_p se llama la fibra del fibrado sobre p .
2. Para cada $p \in M$ existe una vecindad U de p y un difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$, llamado trivialización local del fibrado, tal que $\phi|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \longrightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$ es un isomorfismo. Es decir, $\pi = \pi_1 \circ \phi$, así el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi_1 \\ & & U \end{array}$$

donde π_1 es la proyección a la primera componente.

En general decimos que E es un fibrado vectorial con base M y proyección π .

En un fibrado vectorial, la imagen inversa de un punto a través de π es un espacio vectorial. (localmente un $\mathbb{R}^k$ espacio vectorial)

Ejemplo 1.3.2. *Sea M una variedad de dimensión n . Se define el fibrado tangente por $TM := \{(p, V_p) \mid p \in M, V_p \in T_p M\}$. Para ver que (TM, M, π) es un fibrado vectorial, donde π es la proyección*

$$\begin{aligned} \pi : \quad TM &\longrightarrow M \\ (p, V_p) &\mapsto \pi(p, V_p) = p. \end{aligned}$$

Primero debemos ver que TM es una variedad. Para esto, si consideramos (U_i, ϕ_i) una carta para M , podemos contruir una carta $\{TU_i, \tilde{\phi}_i\}$ para TM , donde

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_i : \quad TU_i &\longrightarrow \phi(U_i) \times \mathbb{R}^n \\ (p, V_p) &\mapsto (\phi(p), \xi(V_p)) = (\phi(p), v^1, \dots, v^n), \end{aligned}$$

donde $\xi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es el isomorfismo visto anteriormente.

Es claro que $TM = \bigcup TU_i$ (unión disjunta), y queda verificar que el cambio de coordenadas es un difeomorfismo. Notemos que dadas (U, ϕ) , (V, ψ) cartas para M con $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ y $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ funciones coordenadas, entonces para cualquier $p \in U \cap V$, podemos considerar $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}_{i=1}^n$ y $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_p \right\}_{j=1}^n$ bases de $T_p M$. Así, cualquier vector tangente $X_p \in T_p M$ lo podemos escribir por

$$X_p = v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = w^j \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p,$$

donde al aplicar x^k , se tiene

$$v^k = w^j \frac{\partial x^k}{\partial y^j}. \quad (1.4)$$

Mientras que aplicando y^k a la anterior igualdad

$$w^k = v^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i}. \quad (1.5)$$

Luego, el cambio de coordenadas es de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1} : \quad \phi(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \psi(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \\ (\phi(p), v^1, \dots, v^n) &\mapsto (\psi \circ \phi^{-1}(\phi(p)), \psi \circ \phi^{-1}(v^1, \dots, v^n)), \end{aligned}$$

donde $(\psi \circ \phi^{-1}(\phi(p)), \psi \circ \phi^{-1}(v^1, \dots, v^n)) = (\psi(p), w^1, \dots, w^n)$. Así, dado que $\psi \circ \phi^{-1}$ es diferenciable por ser cambio de coordenadas en el atlas de M , se tiene que $\tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}^{-1}$ es diferenciable. Por lo tanto TM es variedad diferenciable de dimensión $2n$.

Ahora, para probar que el fibrado tangente es un fibrado vectorial, consideremos (U, ϕ) carta de M alrededor de p y sea $v = (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $V_p = v^i \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \in T_p M$. Definamos

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \pi^{-1}(U) \subset TM &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ (p, V_p) &\mapsto (p, v^1, \dots, v^n), \end{aligned}$$

donde la primera coordenada, asigna mediante la identidad y la segunda coordenada

mediante el isomorfismo ξ , el cual es diferenciable por (1.4). Luego φ^{-1} también es diferenciable por (1.5) y se tiene que φ es difeomorfismo.

Finalmente, note que $\pi^{-1}(p) = \{p\} \times T_p M$ pues para $(x, y) \in \pi^{-1}(p)$ se tiene $\pi(x, y) = p$ y entonces $x = p$, $y \in T_p M$, así $(x, y) \in \{p\} \times T_p M$ y claro que $\phi|_{\pi^{-1}(p)}$ es un isomorfismo de espacio vectorial, ya que la identidad y ξ son transformaciones lineales biyectivas. Además, es fácil ver que $\pi = \pi_1 \circ \varphi$. Por lo tanto (TM, M, π) es un fibrado vectorial.

Análogamente se puede probar para el fibrado cotangente definido por $T^*M = (TM)^* = \{(p, \omega_p) \mid p \in M, \omega_p \in T_p^* M\}$, que (T^*M, M, π) con π la proyección sobre p es un fibrado vectorial.

Ejemplo 1.3.3. $(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, \pi)$ es un fibrado vectorial con la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto \pi(x, y) = y \end{aligned}$$

La fibra es $\pi^{-1}(y_0) = \mathbb{R}^k \times \{y_0\}$, $\phi: \pi^{-1}U \longrightarrow \mathbb{R}^k \times U$ es la identidad y $\phi|_{\pi^{-1}(p)}$ es isomorfismo de espacio vectorial.

Para los detalles del siguiente lema, ver [7].

Lema 1.3.4. Sea M variedad, E un conjunto y $\pi: E \longrightarrow M$ aplicación sobreyectiva. Supongamos que existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M y funciones biyectivas $\phi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ tales que

$$1. \quad \pi_1 \circ \phi_\alpha = \pi$$

$$2. \quad \text{Si } U_\alpha \text{ y } U_\beta \text{ son no vacío tales que } \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}: U_\alpha \cap U_\beta \cap \mathbb{R}^k \longrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \cap \mathbb{R}^k \text{ es de la forma } \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(p, v) = (p, \mathcal{T}(p)(v)) \text{ donde } \mathcal{T}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(K, \mathbb{R}),$$

entonces E tiene una única estructura de fibrado vectorial sobre M .

En otras palabras $\mathcal{T}(p): \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ es una transformación lineal invertible, para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Las funciones ϕ_α se llaman trivializaciones locales y $\mathcal{T}$ es función de transición.

Podemos aplicar esta construcción al fibrado tangente $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ Sea

$$\begin{aligned} \pi: TM &\longrightarrow M \\ (p, V_p) &\longmapsto p. \end{aligned}$$

Tomemos una carta $(U, (x^i))$ sobre M y expresemos $V_p \in T_p M$ usando coordenadas $V_p = v^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$. Esta representación nos da siempre una biyección

$$\begin{aligned} \phi: \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times \mathbb{R}^k \\ V_p &\longmapsto (p, v^1, v^2, \dots, v^k). \end{aligned}$$

Si $(U, (x^i))$ y $(\tilde{U}, (\tilde{x}^i))$ son cartas con $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ sabemos que localmente

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j},$$

entonces para V_p tenemos

$$\begin{aligned} V_p &= \tilde{v}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \\ &= v_i \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= v^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}, \end{aligned}$$

así

$$\tilde{v}^j = v^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}.$$

Osea las nuevas coordenadas $\tilde{v}^j$ están conectadas con las anteriores mediante la función de transición $\mathcal{T}(p) = \left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \Big|_p \right)$.

Definición 1.3.5. Si $\pi: E \longrightarrow M$ es un fibrado vectorial, una función $S: M \longrightarrow E$ es una sección de E si $\pi \circ S(p) = p$, es decir $S(p) \in E_p \cong \pi^{-1}(p)$, $\forall p \in M$.

Ejemplo 1.3.6. Sea $\pi: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la proyección canónica. En este caso, las secciones son de la forma $S(p) = (p, f(p))$ con f una función diferenciable.

Observación: estas construcciones se usan para definir fibrados tensoriales y campos de tensores sobre M . Para cada $p \in M$ podemos formar $T_l^k(T_p M)$.

El fibrado de $\binom{k}{l}$ -tensores sobre M se define como $T_l^k(M) = \bigcup_{p \in M} T_l^k(T_p M)$ y se puede probar que un campo tensorial es una sección de $T_l^k(M)$.

En coordenadas locales (x^i) sobre $U \subset M$, con $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}$ es base de $T_p M$ y $\{dx^i|_p\}$ es base de $T_p^* M$, un tensor F de tipo $\binom{k}{l}$ se puede escribir como

$$F(p) = F_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \Big|_p \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \Big|_p \otimes dx^{j_1} \Big|_p \otimes \dots \otimes dx^{j_l} \Big|_p.$$

1.4. Campos vectoriales

Si nos referimos a M una variedad, nos referiremos a una variedad diferenciable n -dimensional.

Ahora que hemos definido el fibrado tangente, podemos definir campos vectoriales.

Definición 1.4.1. Sea M una variedad y $\pi: TM \rightarrow M$ la proyección canónica. Un campo vectorial sobre M es una sección del fibrado tangente TM . Es decir, una aplicación diferenciable $S: M \rightarrow TM$ dada por $S(p) = (p, X_p)$.

Informalmente, podemos definir un campo vectorial X como una asignación de un vector tangente $X_p \in T_p M$ para cada $p \in M$, es decir, si X es un campo y $f \in \mathfrak{T}(M)$, entonces podemos definir la función Xf por

$$\begin{aligned} Xf: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto X(f)(p) = X_p(f). \end{aligned}$$

Si $Xf \in \mathfrak{T}(M)$ para todo $f \in \mathfrak{T}(M)$ entonces diremos que X es un campo vectorial (ver [9], cap. 7-4).

Observación: note que si (U, ϕ) es una carta con $p \in U \subset M$, podemos construir una

base $\mathcal{B} = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}_{i=1}^n$ de $T_p M$ y en dicha base

$$X_p = v^i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p$$

y así $X = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ solo tiene sentido sobre el abierto $U \subset M$ y (U, ϕ) es carta. Así, tendríamos un campo vectorial definido sobre U .

Definición 1.4.2. Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ al conjunto de todos los campos vectoriales sobre M . Esto es

$$\mathfrak{X}(M) = \left\{ S : M \longrightarrow TM \mid S \text{ es diferenciable y } \pi \circ S = id_M \right\}.$$

Observación: sea $f \in \mathfrak{T}(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Otra manera de definir el campo vectorial fX es mediante una asignación, que a cada punto $p \in M$ le asigna $f(p)X_p \in T_p M$.

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $r \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathfrak{T}(M)$, entonces podemos definir $(X + Y)$, (rX) y (fX) por

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p,$$

$$(rX)_p = rX_p,$$

$$(fX)_p = f(p)X_p.$$

Definición 1.4.3. Sea $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definimos el Corchete de Lie de X e Y por

$$[X, Y]_p f = X_p(Yf) - Y_p(Xf), \quad f \in \mathfrak{T}(M), \quad p \in M.$$

De esta definición, se sigue de manera directa lo siguiente:

Lema 1.4.4. $[X, Y]$ es un campo vectorial sobre M .

Ejemplo 1.4.5. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y consideremos $X = x^1 x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)$ y $Y = x^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right)$. Calculemos $[X, Y]$.

Si $f \in \mathfrak{T}(M)$, entonces

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \left(x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) - x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \left(x^1 x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) \\ &= x^1 (x^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} - x^2 x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1 (x^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2} \\ &= -x^2 x^1 \frac{\partial f}{\partial x^1}, \end{aligned}$$

por lo tanto $[X, Y] = -x^2 x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}$.

Directamente de la definición se sigue:

Lema 1.4.6. Sea $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ y $[rX, Y] = r[X, Y]$,
2. $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$ y $[Z, X + Y] = [Z, X] + [Z, Y]$,
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

1.4.1. La diferencial y subvariedades

En esta sección introduciremos el concepto de diferencial de una aplicación entre variedades, aplicando esta noción a la idea de subvariedad de una variedad dada. Asumiremos que M y N son variedades. Queremos definir un elemento $(\Phi_*)_p(X_p)$ de $T_{\Phi(p)}N$ para cada $X_p \in T_pM$ de tal manera que la asignación a través de $(\Phi_*)_p$ es una transformación lineal para cada $p \in M$.

Definición 1.4.7. Si $\Phi : M \longrightarrow N$ es diferenciable, entonces se define la diferencial de Φ en p por

$$\begin{aligned} (\Phi_*)_p : T_pM &\longrightarrow T_{\Phi(p)}N \\ X_p &\longmapsto (\Phi_*)_p X_p : \mathfrak{T}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &f \longmapsto (\Phi_*)_p(X_p)f, \end{aligned}$$

donde $(\Phi_*)_p(X_p)f := X_p(f \circ \Phi) \in \mathbb{R}$.

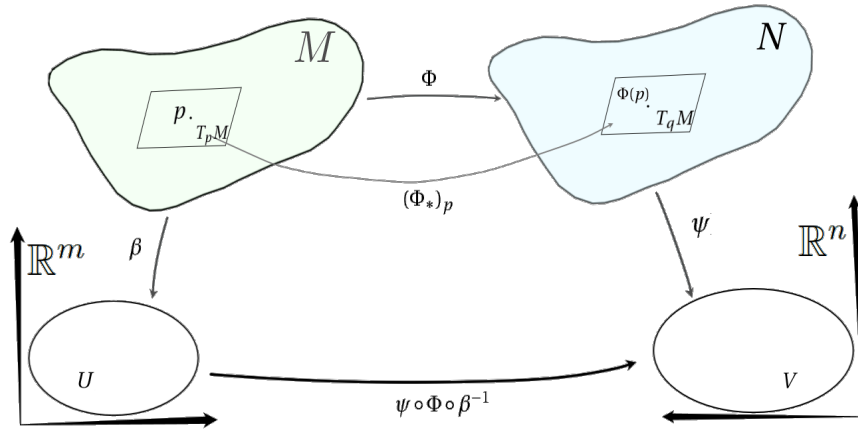
Lema 1.4.8. $(\Phi_*)_p$ está bien definida. Esto es, si $\Phi : M \longrightarrow N$ y $X_p \in T_pM$, entonces $(\Phi_*)_p(X_p) \in T_{\Phi(p)}N$.

Lema 1.4.9. Sea $\Phi : M \longrightarrow N$ y $p \in M$. Entonces $(\Phi_*)_p : T_p M \longrightarrow T_{\Phi(p)} N$ es una transformación lineal.

Teorema 1.4.10. Sea $\Phi : M \longrightarrow N$ diferenciable, (U, β) carta con $p \in U$ y (V, ψ) carta con $q = \Phi(p) \in V$ tal que $\Phi(U) \subset V$. Si $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}_{i=1}^m$ es la base de $T_p M$ asociada a la carta (U, β) y $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_q \right\}_{j=1}^n$ es base de $T_{\Phi(p)} M = T_q M$ asociada a la carta (V, ψ) , entonces la matriz $(\Phi_*)_p$ con respecto a estas bases es el jacobiano de $\psi \circ \Phi \circ \beta^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y por lo tanto

$$(\Phi_*)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial (y^j \circ \Phi \circ \beta^{-1})}{\partial u^i}(s) \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \right)_q,$$

donde $s = \beta(p)$.



Definición 1.4.11. Sean M y N variedades de dimensión m y n , respectivamente. Diremos que M es subvariedad de N si existe una función $\Phi : M \longrightarrow N$ diferenciable e inyectiva, con diferencial $(\Phi_*)_p$ inyectiva para todo $p \in M$. Si la función es homeomorfismo sobre su imagen entonces Φ se llama incrustación de M en N .

Observación: note que al ser $(\Phi_*)_p$ inyectiva, entonces $(\Phi_*)_p(T_p M) \subset T_{\Phi(p)} N$ es subespacio de $T_{\Phi(p)} N$ de dimensión $m \leq n$.

Así $T_p M$ puede ser visto como subespacio de $T_{\Phi(p)} N$. Si $(\Phi_*)_p$ es inyectiva, se dice que Φ es una inmersión.

Ejemplo 1.4.12. Sea $M = M_f$ la hipersuperficie inducida por $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, es decir $M_f = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) = 0\}$. Sabemos que M_f es una variedad n -dimensional si $\text{grad} f \neq 0, \forall x \in M_f$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\frac{\partial f}{\partial u^{n+1}}(p) \neq 0$, mientras que, en virtud el teorema de la función implícita, localmente se tiene que w^{n+1} puede ser escrito en función de las otras coordenadas, es decir, existe un abierto alrededor del punto p tal que $w = (w^1, \dots, w^{n+1})$ si y sólo si $w^{n+1} = g(w^1, \dots, w^n)$ con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua y diferenciable. En este caso, la carta de M_f es (W, β) , donde

$$\beta^{-1}(u^1, \dots, u^n) = (u^1, \dots, u^n, g(u^1, \dots, u^n)).$$

Sea $\phi : M_f \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la inclusión, ψ la identidad, luego

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi \circ \beta^{-1}(u^1, \dots, u^n) &= \psi(\phi(u^1, \dots, u^n, g(u^1, \dots, u^n))) \\ &= \psi(u^1, \dots, u^n, g(u^1, \dots, u^n)) \\ &= (u^1, \dots, u^n, g(u^1, \dots, u^n)), \end{aligned}$$

así

$$\frac{\partial}{\partial u^i} (\psi \circ \phi \circ \beta^{-1})^j(u^1, \dots, u^n) = \begin{cases} 1; & i = j, \\ 0; & i \neq j; \quad , i = n+1 \\ \frac{\partial g}{\partial u^i}; & j = n+1. \end{cases}$$

Luego

$$(\Phi_*)_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_p + \frac{\partial g}{\partial u^i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^n} \right)_p.$$

Teorema 1.4.13. Sea $M = M_f$ la hipersuperficie definida por $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $T_p M$ es isomorfo (como espacio vectorial) a

$$(\Phi_*)_p(T_p M) = \{X_p \in T_p \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle (\text{grad } f)_p, X_p \rangle = 0\},$$

donde Φ es la inclusión de M en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ahora mencionaremos algunas nociones de 1-formas sobre variedades

Definición 1.4.14. Una 0-forma diferenciable de clase C^k con $k \geq 1$ en M es una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k .

Definición 1.4.15. Una 1-forma diferenciable ω de clase C^k en M es una asignación de una aplicación $\omega_p \in T_p^* M$, $p \in M$.

En términos del fibrado cotangente, una 1-forma sobre M es una sección del fibrado cotangente $T^* M$, es decir, es una función $\omega : M \rightarrow T^* M$ tal que $\pi \circ \omega = Id_M$.

Hemos visto que para $\Phi : M \rightarrow N$ diferenciable, el diferencial $(\Phi_*)_p : T_p M \rightarrow T_{\Phi(p)} N$ es lineal.

Definición 1.4.16. Sea ω es una 1-forma en N . El pullback $\Phi^* \omega$ es la 1-forma en M dado por

$$(\Phi^* \omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{\Phi(p)}((\Phi_*)_p(v_1), \dots, (\Phi_*)_p(v_k)), \quad \text{para } (v_1, \dots, v_k) \in T_p M, \forall p \in M.$$

Notar que si $f \in \mathfrak{T}(N)$, es decir, si f es una 0-forma entonces $\Phi^* f = (f \circ \Phi) \in \mathfrak{T}(M)$.

1.5. Métricas riemannianas y pseudo riemannianas

Recordemos que si $\langle , \rangle$ es un pseudo producto interno, es decir, no necesariamente definido positivo, entonces él es una forma bilineal, simétrica no degenerada sobre V . Gram-Schmidt nos dice que existe una base donde la matriz de $\langle , \rangle$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } n \text{ veces } 1 \text{ y con } m \text{ veces } -1 \text{ en la diagonal.} \quad (1.6)$$

La cantidad de 1 y -1 no depende de la base que se use. Decimos que este producto interno es de signatura (n, m) . Además, $\langle , \rangle$ permite identificar a V con V^* de manera natural a través del teorema de representación de Riesz

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : V^* \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, v) &\longmapsto \langle \omega, v \rangle := \omega(v). \end{aligned}$$

Observación: los productos de interés en la física son de signatura $(n, 1)$ en un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ y se llaman producto de Lorentz.

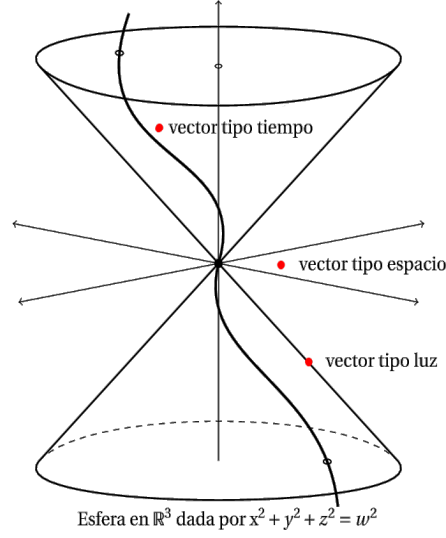
Ejemplo 1.5.1. Sea el pseudo producto interno sobre $\mathbb{R}^4$ definido por

$$\langle (x, y, z, w), (x^1, y^1, z^1, w^1) \rangle = -w w^1 + x x^1 + y y^1 + z z^1.$$

Llamaremos a $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$ el Espacio de Minkowski.

Notemos que $\langle v, v \rangle = -w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ si $v = (w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, entonces es posible que $\langle v, v \rangle$ sea positivo, negativo o cero en más de un vector, esto nos permite separar los vectores en tres clases:

1. Tipo espacio: Si $\langle v, v \rangle > 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 > w^2$,
2. Tipo tiempo: Si $\langle v, v \rangle < 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 < w^2$,
3. Tipo luz: Si $\langle v, v \rangle = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 = w^2$.



Esta división se llama *división causal del espacio de Minkowski*, donde de los postulados de la relatividad general se establece que "La luz se desplaza por la superficie del cono y las partículas por dentro del cono".

Definición 1.5.2. Si M es una variedad, una métrica g sobre M es una sección del fibrado tensorial $T_2^0(M) = \bigcup_{p \in M} T_2^0(T_p M)$, donde $T_2^0(T_p M) = \{f : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es bilineal}\}$ así $g(p) \in T_2^0(T_p M)$ es una forma bilineal simétrica no degenerada.

Lo que nos dice que en cada punto $p \in M$ tenemos un producto interno sobre $T_p M$, tal que para todo $W_p, X_p, Y_p, Z_p \in T_p M$, $a, b \in \mathbb{R}$ verifica ser

1. Bilineal: $g_p(aW_p + bX_p, Y_p) = ag_p(W_p, Y_p) + bg_p(X_p, Y_p)$,
2. Simétrica: $g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$,
3. No degenerada: $g_p(X_p, Y_p) = 0, \forall Y_p \in T_p M$ si y solo si $X_p = 0$.

Observación: la métrica riemanniana corresponde al caso que $g(p)$ tiene signatura $(n, 0)$ para n entero positivo, es decir, la métrica es definida positiva: $g_p(X_p, X_p) \geq 0$, donde $g_p(X_p, X_p) = 0$ si y solo si $X_p = 0$. Por otro lado, si $g(p)$ tiene signatura (n, m) para n entero positivo y m entero negativo, diremos que la métrica es pseudo-riemanniana en un espacio de dimensión $n + m$. Mientras que la métrica lorentziana corresponde al caso particular de métrica pseudo-riemanniana cuando $g(p)$ tiene signatura $(n - 1, 1)$ en un espacio de dimensión n .

Definición 1.5.3. Se llamará *variedad riemanniana (pseudo-riemanniana)* a una variedad M junto con una métrica riemanniana (pseudo-riemanniana) fija.

Observación: se puede probar que toda variedad diferenciable, paracompacta¹, conexa y hausdorff, puede ser dotada de una métrica riemanniana (ver [6], cap. 6).

Definición 1.5.4. La longitud de un vector $V_p \in T_p M$ está dado por $\sqrt{g_p(V_p, V_p)}$.

Definición 1.5.5. Dos vectores $V_p, W_p \in T_p M$ son ortogonales si y solo si $g_p(V_p, W_p) = 0$.

Definición 1.5.6. Si (M, g) y (M', g') son dos variedades pseudoriemannianas, decimos que M y M' son isométricas si existe difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M'$ tal que

$$g'_p(\varphi(V_p), \varphi(W_p)) = g_p(V_p, W_p),$$

para todo $V_p, W_p \in T_p M$.

Observación: muchas propiedades de interés preservadas por isometrías son frecuentemente llamadas propiedades intrínsecas.

Una forma sofisticada de estudiar relatividad es estudiando el espacio de métricas lorentzianas módulo la equivalencia isométrica. Este espacio se llama Espacio módulo

$$M_{/[g]} ; [g] = \{g' \mid g \text{ es isométrica a } g'\}.$$

Observación: si consideramos un abierto alrededor de $p \in M$, y $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ coordenadas locales y si $V_p, W_p \in T_p M$ donde $V_p = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ y $W_p = w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$, podemos escribir $g_p(V_p, W_p) = g_{ij}(p) v^i w^j$ donde las funciones $g_{ij}(p) = g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$ expresan los coeficientes de la métrica g en coordenadas locales.

Si g es una métrica sobre M con coordenadas locales $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ de M , g se puede escribir como $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ donde $g_{ij} = g_{ji}$ y $\det(g_{ij}) \neq 0$ (no degenerado).

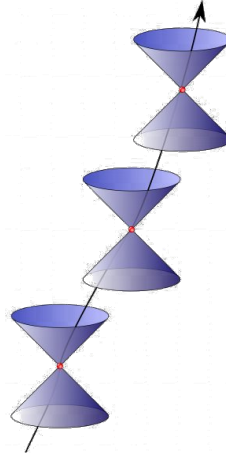
¹Sea M un espacio topológico. Se dice que una colección X de subconjuntos de M es localmente finita si cada punto de M tiene una vecindad que interseca a lo sumo un número finito de los conjuntos en X . Dado un cubrimiento $\mathcal{U}$ de M , otro cubrimiento $\mathcal{V}$ se llama refinamiento de $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe algún $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \subseteq U$. Decimos que M es **paracompacto** si cada cubrimiento abierto de M admite un refinamiento localmente finito.

²Si las matrices de las métricas son semejantes, entonces ellas son equivalentes.

Resumiendo hasta ahora, recordemos que g es métrica pseudoriemanniana si para todo $p \in M$, $g(p)$ es un producto interno sobre $T_p M$, esto significa que en cada punto $p \in M$ existe una base de $T_p M$ tal que la matriz de g respecto de esa base es de orden (n, m) .

Las métricas de interés para relatividad son las riemannianas y las métricas lorentzianas (en algunos textos es al contrario). Así un producto interno con signatura $(n-1, 1)$ divide a los vectores en tres clases: tipo tiempo $g_p(V, V) < 0$, tipo espacio $g_p(V, V) > 0$ y tipo luz $g_p(V, V) = 0$.

La premisa de la Teoría General de la Relatividad es que la signatura adecuada es $(3, 1)$. Al ser una variedad lorentziana tenemos conos originados desde cada punto de M . Además, es importante notar que cada cono está en el plano tangente, pues está formado por todos los vectores tipo luz en $T_p M$. Dichos conos determinan la "estructura causal" de la variedad M .



Un espacio tiempo es una variedad M de dimensión 4 equipada con una métrica Lorentziana. Sin embargo, no cualquier variedad M es un buen modelo de espacio tiempo. Para ello, M debe ser orientable, conexa y paracompacta.

Se puede probar por Gram Schmidt que cerca de un punto siempre existe una base local de vectores $x_1, x_2, \dots, x_n$ tal que la métrica de $g(p)$ en la base $x_1(p), \dots, x_n(p)$ es de la forma de la ecuación (1.6).

La base local no tiene por qué ser $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$. Este es el caso en que la variedad es

plana, osea localmente isométrica a $\mathbb{R}^n$.

En coordenadas locales $\{x^1, \dots, x^n\}$ de $U \subset M$, la métrica g se escribe como $g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, y la matriz inversa de (g_{ij}) es (g^{ij}) . Una métrica nos permite pasar de tensores covariantes a contravariantes y viceversa. Clásicamente, esto es subir o bajar índices.

Ejemplo 1.5.7. Si $X = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, se puede definir x_i usando g_{ij} para bajar índices, esto es, $x_i = g_{ij}x^j$.

Ejemplo 1.5.8. Sea $B \in T_2^1(M)$ con coeficientes B_{ik}^l , es decir $B = B_{ik}^l dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^k$. Así podemos definir el tensor B_{ilk} como $g_{lj}B_{ik}^j$, es decir $B_{ilk} = g_{l1}B_{ik}^1 + g_{l2}B_{ik}^2 + \dots + g_{ln}B_{ik}^n$, donde B_{ilk} son las componentes de un tensor 3 veces covariante.

Observación: cualquier variedad paracompacta, admite una métrica riemanniana. Cualquier variedad no compacta admite una métrica lorentziana. De igual forma si la variedad es compacta admite una métrica pseudoriemanniana con restricciones topológicas.

1.5.1. Derivada covariante y curvatura

En una variedad lorentziana M existe una única conexión $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$ tal que para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, h \in \mathfrak{T}(M)$ verifica las siguientes propiedades:

1. $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$ -lineal en Y : $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$,
2. $\nabla_X Y$ es $\mathfrak{T}(M)$ -lineal en X : $\nabla_{fX+hY} Z = f\nabla_X Z + h\nabla_Y Z$,
3. $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,
4. ∇ es simétrica o libre de torsión: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,
5. ∇ es compatible con la métrica: $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

Llamaremos a $\nabla_X Y$ la derivada covariante de Y en dirección del campo vectorial X , mientras que a ∇ la llamaremos conexión lineal o afín sobre M .

Notemos que esta definición generaliza el concepto clásico de derivada en $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.5.9. Sea ∇ una conexión en M , (U, ϕ) una carta de M , $p \in U$ y $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p \right\}_{i=1}^m$ base asociada a la carta de $T_p M$, entonces $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$. Los símbolos de Christoffel de ∇ con respecto a la carta son funciones $\Gamma_{ij}^k \in \mathfrak{T}(U)$ definidas por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

Ejemplo 1.5.10. Sea $M = \mathbb{R}^n$ el espacio euclidiano. Si $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ entonces es de la forma $Y = y^i e_i$ para algunos $y^i \in \mathfrak{T}(M)$. Definamos la conexión plana sobre $\mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= (X y^i) e_i \\ &= (X y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Además $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0$ para todo i, j por lo que $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall i, j$ y k . En este caso, tenemos que $\nabla_X Y$ es la derivada direccional usual de una función de valor real.

En general existen muchas derivadas covariantes que satisfacen de 1. a 3. pero existe una única que satisface de 1. a 5. y es llamada conexión de Levi-civita.

Teorema 1.5.11. (Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana). Si M es una variedad con métrica g , entonces existe una única conexión afín y simétrica compatible con la métrica.

Usando que (g^{ij}) es la inversa de la métrica (g_{ij}) junto a que si existe ∇ con tales condiciones del teorema anterior, se obtiene la fórmula intrínseca para los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (1.7)$$

Lema 1.5.12. ∇ es libre de torsión si y solo si, en cualquier carta coordenada

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \text{ para todo } 1 \leq i, j, k \leq n.$$

Lema 1.5.13. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $X_p = Y_p$ para algún $p \in M$, entonces $(\nabla_X Z)_p = (\nabla_Y Z)_p$, para todo $Z \in \mathfrak{X}(M)$

Definición 1.5.14. Un campo vectorial a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow M$ es una función $Z : I \rightarrow TM$ tal que $Z_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)} M$, para todo $t \in I$.

Definición 1.5.15. Sea $\alpha : I \longrightarrow M$ una curva en M , definimos el campo vectorial tangente a dicha curva; T_α , por $(T_\alpha)_{\alpha(t)} = (\alpha_*)_t \left(\frac{d}{dt} \right)$, donde t es la coordenada natural para I .

Observación: en coordenadas locales

$$T_{\alpha(t)} = \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\alpha(t)}.$$

Definición 1.5.16. Sea $\alpha : I \longrightarrow M$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos la derivada covariante de Y respecto a α por $\nabla_T Y$. Dado t_0 y $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_{\alpha(t_0)} = T_{\alpha(t_0)}$, $\nabla_T Y$ es el campo vectorial a lo largo de α , dado por

$$(\nabla_T Y)_{\alpha(t_0)} = (\nabla_X Y)_{\alpha(t_0)}, \text{ para todo } X \in \mathfrak{X}(M).$$

Ejemplo 1.5.17. Sea M el espacio euclidiano 2-dimensional, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ para $0 < t < 2\pi$. $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ dado por $Y = ye_1 - xe_2$. Sea $T_{\alpha(t)} = \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\alpha(t)}$, así tenemos $T = -\sin t e_1 + \cos t e_2$.

Si $X = -ye_1 + xe_2$ tal que $X_{\alpha(t)} = \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\alpha(t)}$, entonces $T_{\alpha(t)} = X_{\alpha(t)}$ y por lo tanto $\nabla_T Y = \nabla_X Y$. Luego

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (ye_1 - xe_2) \\ &= Xye_1 - Xxe_2 && (\text{por la definición de conexión del ejemplo 1.5.10}) \\ &= (-ye_1 + xe_2)ye_1 - (-ye_1 + xe_2)xe_2 \\ &= \left(-y \frac{\partial y}{\partial x} + x \frac{\partial y}{\partial y}\right)e_1 - \left(-y \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x}{\partial y}\right)e_2 \\ &= xe_1 + ye_2. \end{aligned}$$

Evaluando en la curva $(\nabla_{T_\alpha} Y)_{\alpha(t)} = (\nabla_X Y)_{\alpha(t)}$, por lo tanto $(\nabla_X Y)_{\alpha(t)} = \cos t e_1 + \sin t e_2$.

Lema 1.5.18. Si $f \in \mathfrak{F}(M)$ y $\alpha : I \longrightarrow M$ son tales que $f \circ \alpha$ es constante, entonces $T_\alpha f = 0$.

Demostración. Por definición

$$\begin{aligned} T_\alpha f &= \alpha_* \left(\frac{d}{dt} \right) f \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right) (f \circ \alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Lema 1.5.19. *Sea $\alpha : I \longrightarrow M$, $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Y_{\alpha(t)} = Z_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$. Entonces $\nabla_{T_\alpha} Y = \nabla_{T_\alpha} Z$ a lo largo de α .*

Si Y es un campo vectorial a lo largo de una curva α , la derivada de Y a lo largo de α está dada por $Y' = \nabla_{T_\alpha} Y$, donde T_α es el campo vectorial tangente a la curva α .

Definición 1.5.20. *Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Diremos que Y es transportado paralelamente a lo largo de la curva $\alpha : I \longrightarrow M$ si $\nabla_{T_\alpha} Y = 0$.*

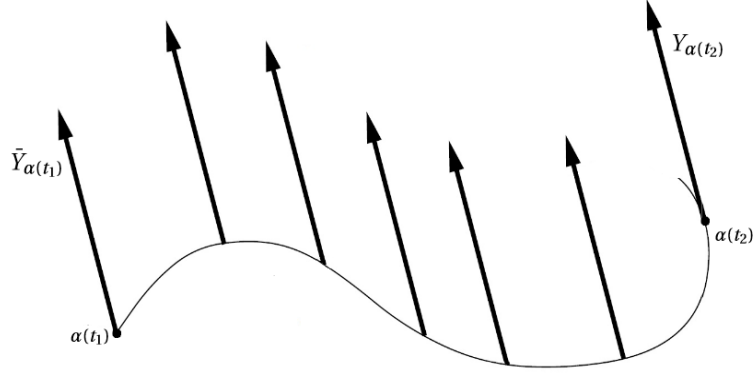
Con la derivada covariante se puede construir la función transporte paralelo a lo largo de curvas. Pero antes, enunciamos el siguiente teorema, resultante de aplicar el teorema de existencia y unicidad de Picard [ver [9], p. 228].

Teorema 1.5.21. *(Levi-Civita, 1971) Sea $\alpha : [c, d] \longrightarrow M$ una curva, $p = \alpha(c)$ y $\tilde{Y} \in T_p M$. Entonces existe un único campo vectorial Y que es paralelo a lo largo de la curva α tal que $Y_{\alpha(c)} = \tilde{Y}_p$.*

Definición 1.5.22. *La función transporte paralelo desde $\alpha(t_1)$ hasta $\alpha(t_2)$ a lo largo de α se define por*

$$\begin{aligned} P_{\alpha, t_1, t_2} : T_{\alpha(t_1)} M &\longrightarrow T_{\alpha(t_2)} M \\ \tilde{Y}_{\alpha(t_1)} &\longmapsto Y_{\alpha(t_2)} \end{aligned}$$

donde Y es el único campo vectorial paralelo a lo largo de α tal que $Y_{\alpha(t_1)} = \tilde{Y}_{\alpha(t_1)}$.



Definición 1.5.23. Una curva α sobre M es geodésica con respecto a la conexión si

$$\nabla_{T_\alpha} T_\alpha = 0.$$

Una geodésica es una curva cuya tangente es transportada paralelamente.

Como $Y' = \nabla_{T_\alpha} Y$, donde $Y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\alpha = (x^i(t))$ y $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m}$, entonces

$$\begin{aligned} Y' &= \nabla_{\dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}} y^j \frac{\partial}{\partial x^j} && \text{con } \dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}, \\ &= \dot{x}^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \dot{x}^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} y^j \frac{\partial}{\partial x^j} + y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \dot{x}^i \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + y^j \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= \dot{x}^i \left(\frac{\partial y^m}{\partial x^i} + y^j \Gamma_{ij}^m \right) \frac{\partial}{\partial x^m}. \end{aligned}$$

Concluimos que Y es transportado paralelamente a lo largo de α si y sólo si

$$\frac{dx^i}{dt} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} + y^j \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{dt} = 0 \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, n,$$

es decir, si

$$\frac{dy^m}{dt} + y^j \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{dt} = 0, \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, n,$$

con la condición inicial $y(0) = p = Y_{\alpha(0)}$, tenemos solución única, y esta solución nos

da las coordenadas del vector paralelamente transportado a lo largo de la curva $\alpha(t) = (x^i(t))$.

Un caso especial es cuando $\alpha'(t)$ es transportado paralelamente. En este caso $\alpha'(t) = \dot{x}^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ y la ecuación diferencial del transporte paralelo se transforma en

$$\frac{d^2 x^m}{dt^2} + \Gamma_{ij}^m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad \text{con } m = 1, 2, \dots, n, \quad (1.8)$$

pues $\Gamma_{ij}^m(t) = \Gamma_{ji}^m(t)$.

Estas son las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en M . No siempre es posible probar que las soluciones de la ecuación (1.8) existen para todo $t \in I$.

Si las soluciones están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, con las condiciones iniciales $x^i(0) = p$ y $\dot{x}^i(0) = v^i$, diremos que M es geodésicamente completo.

Definición 1.5.24. El tensor de tipo $\left(\frac{1}{3}\right)$ llamado tensor de curvatura Riemann - Christoffel de una variedad (M, g) es la función trilineal $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z.$$

En coordenadas locales

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Así R_{ijk}^l es un tensor de $T_3^1(M)$.

También se puede obtener el tensor de curvatura de Riemann como un tensor 4 veces covariante obtenido del tensor $\left(\frac{1}{3}\right)$

Observación: el tensor de Riemann - Christoffel de tipo $\left(\frac{0}{4}\right)$ como función $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{T}(M)$ está dada por

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

En coordenadas, esto es $R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$, luego $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$.

Lema 1.5.25. Sea (U, ϕ) carta con $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p \right\}$ una base asociada a la carta de $T_p M$ para $p \in U$. Entonces

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l \right) \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Demostración. Por Definición 1.5.24, en coordenadas de la base de $T_p M$ se tiene

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right]} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde $\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] f = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} f - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j} f$, entonces $\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right] = 0, \forall f \in \mathfrak{T}(M)$.

Luego

$$\begin{aligned} R \left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left(\Gamma_{ji}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma_{ki}^m \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ji}^l \frac{\partial}{\partial x^l} - \Gamma_{ji}^m \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ki}^l \frac{\partial}{\partial x^l} + \Gamma_{ki}^m \Gamma_{jm}^l \frac{\partial}{\partial x^l} - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ji}^l \frac{\partial}{\partial x^l} - \Gamma_{ji}^m \Gamma_{km}^l \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^l \right) \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad \text{con } 1 \leq m \leq n. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.5.26. Calcularemos los coeficientes R_{ijk}^l para la esfera S^2 . En coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$, se deduce que

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

y la matriz inversa de la métrica

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

Cálcularemos los símbolos de Christoffel usando la ecuación (1.7), en cuanto a notación, tacharemos todos aquellos términos que se anulan debido a la métrica o a la inversa de la métrica. Además recordemos que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} \left[g^{11} \left(\cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial \theta}} - \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right) + \cancel{g^{12}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} - \cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}} \right) + \cancel{g^{13}} \left(\frac{\partial g_{32}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{32}}{\partial \theta} - \cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial \phi}} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \\ &= -r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} \left[g^{11} \left(\cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial \phi}} + \cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial \phi}} - \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) + \cancel{g^{12}} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{23}}{\partial \phi} - \cancel{\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta}} \right) + \cancel{g^{13}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} - \cancel{\frac{\partial g_{33}}{\partial \phi}} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \\ &= -r \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \left[\cancel{g^{21}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \theta} + \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial r}} \right) + g^{22} \left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial \theta}} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial \theta}} \right) + \cancel{g^{13}} \left(\cancel{\frac{\partial g_{31}}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial g_{32}}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial \phi}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r},\end{aligned}$$

así $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} \left[\cancel{g^{31}} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \phi} + \cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial r}} \right) + \cancel{g^{32}} \left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial \phi}} + \cancel{\frac{\partial g_{23}}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial \theta}} \right) + g^{33} \left(\cancel{\frac{\partial g_{31}}{\partial \phi}} + \frac{\partial g_{33}}{\partial r} - \cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial \phi}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r},\end{aligned}$$

así $\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} \left[\cancel{g^{21}} \left(\frac{\partial \cancel{g_{13}}}{\partial \phi} + \frac{\partial \cancel{g_{13}}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) + g^{22} \left(\frac{\partial \cancel{g_{23}}}{\partial \phi} + \frac{\partial \cancel{g_{23}}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right) + \cancel{g^{23}} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \\ &= -\sin \theta \cos \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{23}^3 &= \frac{1}{2} \left[\cancel{g^{31}} \left(\frac{\partial \cancel{g_{12}}}{\partial \phi} + \frac{\partial \cancel{g_{13}}}{\partial \theta} - \frac{\partial \cancel{g_{23}}}{\partial r} \right) + \cancel{g^{32}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \phi} + \frac{\partial \cancel{g_{23}}}{\partial \theta} - \frac{\partial \cancel{g_{23}}}{\partial \theta} \right) + g^{33} \left(\frac{\partial \cancel{g_{32}}}{\partial \phi} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} - \frac{\partial \cancel{g_{23}}}{\partial \phi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \\ &= \cot \theta,\end{aligned}$$

así $\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot \theta$. El resto de los coeficientes de Christoffel se anulan.

Ahora, podemos calcular los componentes del tensor de curvatura usando Lema 1.5.25. Por otro lado, podemos esperar que todos los coeficientes son cero, pues. Verificaremos algunos de ellos, también tachando aquellos símbolos de Christoffel que son cero.

$$\begin{aligned}R_{221}^1 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \cancel{\Gamma_{21}^1} + \cancel{\Gamma_{21}^1} \cancel{\Gamma_{12}^1} + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \cancel{\Gamma_{21}^3} \cancel{\Gamma_{32}^1} - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \cancel{\Gamma_{11}^1} - \cancel{\Gamma_{22}^2} \cancel{\Gamma_{21}^1} - \cancel{\Gamma_{22}^3} \Gamma_{31}^1 \\ &= \frac{1}{r} (-r) + \frac{\partial r}{\partial r} \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{111}^2 &= \frac{\partial}{\partial r} \cancel{\Gamma_{11}^2} + \cancel{\Gamma_{11}^1} \cancel{\Gamma_{11}^2} + \cancel{\Gamma_{11}^2} \Gamma_{21}^2 + \cancel{\Gamma_{11}^3} \cancel{\Gamma_{31}^2} - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{11}^2 - \cancel{\Gamma_{11}^1} \cancel{\Gamma_{11}^2} - \cancel{\Gamma_{11}^2} \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{31}^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{121}^2 &= \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{11}^3 \Gamma_{32}^2 - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^3 \Gamma_{31}^2 \\
 &= -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{232}^3 &= \frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_{22}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^3 \Gamma_{33}^3 - \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{23}^1 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{23}^2 \Gamma_{22}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 \\
 &= -r \frac{1}{r} - \frac{\partial \cot \theta}{\partial \theta} - \cot^2 \theta \\
 &= -1 + (\csc^2 \theta - \cot^2 \theta) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Análogamente, $R_{ijk}^l = 0$ para todo $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Definición 1.5.27. El tensor de Ricci $R_{ij} dx^i \otimes dx^j$ es el tensor de tipo $\binom{0}{2}$ obtenido por la contracción del tensor de curvatura

$$R_{ij} = R_{ikj}^k.$$

Definición 1.5.28. La curvatura escalar se define por R , el cual es la contracción del tensor de Ricci $g^{ij} R_{ij} = R$.

Observación: $R_i^i = g^{ij} R_{ilj}^l$ es la curvatura escalar en términos del tensor de curvatura.

Se sigue directo de la definición

Lema 1.5.29. El tensor de curvatura de Riemann Christoffel de tipo $\binom{1}{3}$ tiene las siguientes propiedades de simetría:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,
2. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$,
3. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$.

Observación: en coordenadas, estas propiedades se escriben como:

1. $R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l$,
2. $R_{ijkm} = -R_{jikm}$,
3. $R_{ijk}^l + R_{jki}^l + R_{kij}^l = 0$.

Parte 3. del Lema 1.5.29 es llamada primera identidad de Bianchi. Mientras que la identidad que satisface para la derivada covariante del tensor de curvatura, es llamada segunda identidad de Bianchi:

Proposición 1.5.30. Sean $X, Y, Z, V \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada covariante del tensor de curvatura de Riemann Christoffel verifica

$$\nabla_X R(Y, Z)V + \nabla_Y R(Z, X)V + \nabla_Z R(X, Y)V = 0.$$

Observación: podemos expresar el campo vectorial $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^l} := \nabla_m R_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial x^l}$. Así, la identidad de Bianchi expresada en coordenadas es

$$\nabla_m R_{ijk}^l + \nabla_k R_{imj}^l + \nabla_j R_{ikm}^l = 0.$$

Esta última propiedad es importante para determinar el tensor de Einstein.

Capítulo 2

Algunos preliminares de relatividad general

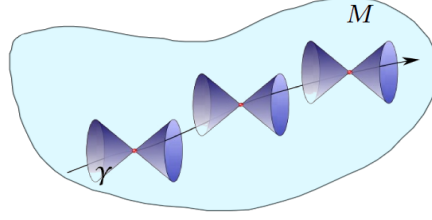
La estructura de este capítulo se basa en [10, 12], en el cual se presentan las definiciones y teoremas necesarios que nos permiten obtener las condiciones bajo las cuales resolveremos el problema.

Asumiremos (M, g) una variedad Lorentziana y entregaremos breves nociones acerca de causalidad y orientación temporal para definir un espacio-tiempo.

2.1. Introducción a relatividad

Un espacio-tiempo es una variedad lorentziana (M, g) , hausdorff y de dimensión 4. Generalmente (M, g) está equipada con información extra que sirve para modelar el electromagnetismo, la materia, los fluidos, entre otros. Así M describe la historia completa de un proceso físico. En otras palabras, M no es un conjunto de puntos sino mas bien un espacio de eventos o sucesos donde la métrica g codifica información sobre el espacio - tiempo y la gravedad. Por ejemplo, g permite definir causalidad, distancia, tiempo, velocidad, aceleración, rotación, rigidez, simultaneidad, ortogonalidad, etc.

Por ejemplo, una partícula se modela como una curva $\gamma : \varepsilon \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow M$ con cierta masa $m \in (0, \infty)$, un intervalo ε .



Cuando se estudian partículas, g equipa a M con un sentido de *futuro* y *pasado*, como veremos más adelante, y se dice que M debe ser *temporalmente orientable*.

También g nos permite definir una longitud de arco que modela el tiempo a lo largo de γ , lo que reemplaza el tiempo newtoniano.

Por ejemplo, si consideramos $\mathbb{R}^2$ con la métrica lorentziana

$$g = du^1 \otimes du^1 - du^2 \otimes du^2,$$

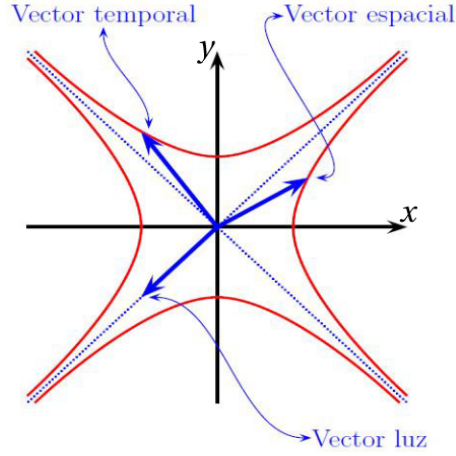
con $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de la métrica de Minkowski en la base $\{e_0, e_1\}$ de $\mathbb{R}^2$. Si $V = (x, y)$ es un vector tipo luz, entonces

$$(x, y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2 = 0,$$

por lo que los vectores tipo luz ocupan las bisectrices de cada cuadrante y dividen al espacio en 4 regiones.

Para vectores tipo espacio se tiene $x^2 - y^2 > 0$. Para algún $r \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, se tiene $x^2 - y^2 = r^2$. Luego $\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$. Por lo que los vectores tipo espacio pertenecen al interior de las hipérbolas laterales.

Por otro lado, para vectores tipo tiempo tenemos $x^2 - y^2 < 0$ y para algún $r \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, se tiene $x^2 - y^2 = -r^2$. Luego $\left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$. Por lo que los vectores tipo espacio pertenecen al interior de las hipérbolas superior e inferior.



2.2. Estructura causal

Para analizar la equivalencia física de objetos geométricos, consideremos que para cada $p \in M$ podemos identificar $g(p)$ como un producto interno, esto nos ayuda a crear el isomorfismo entre $T_p M$ y su dual $T_p^* M$ tal que dado $V \in T_p M$ se tiene $g(p)(V, \cdot) \in T_p^* M$. En coordenadas locales, esto es $V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \mapsto g_{ij}(p) V^i dx^j$. Este isomorfismo determina isomorfismos entre espacios de tensores que corresponde a subir y bajar índices. Así, dos tensores son físicamente equivalentes si están relacionados por este tipo de isomorfismos.

Para mayor detalle de lo que veremos en esta sección, ver [12].

Ejemplo 2.2.1. Supongamos que $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Para hallar los tensores físicamente equivalentes a $X \otimes Y$, en coordenadas de la base, consideremos $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Luego $X \otimes Y = X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$.

$$\begin{aligned} g(X, \cdot) \otimes Y &= g_{ij} X^i dx^j \otimes Y^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= g_{ij} X^i Y^k dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} X \otimes g(Y, \cdot) &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes g_{jk} Y^j dx^k \\ &= g_{jk} X^i Y^j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k, \end{aligned}$$

finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} g(X, \cdot) \otimes g(Y, \cdot) &= g_{im} X^i dx^m \otimes g_{jk} Y^j dx^k \\ &= g_{im} g_{jk} X^i Y^j dx^m \otimes dx^k. \end{aligned}$$

A continuación, veremos algunas nociones de la estructura de espacio vectorial, donde nos referiremos como producto lorentziano a la métrica lorentziana por la identificación $g(v, w) = \langle v, w \rangle$.

Definición 2.2.2. Sea (V, g) un espacio vectorial con un producto lorentziano y sea W un subespacio de V . Diremos que:

1. W es tipo espacio si $g|_W$ es definido positivo.
2. W es tipo luz si $g|_W$ es semidefinido positivo pero no definido positivo.
3. W es tipo tiempo si $g|_W$ no es tipo espacio ni tipo luz.
4. El carácter causal de un vector v es el carácter causal de $\text{gen}\{v\}$.

Ejemplo 2.2.3. Sea (V, g) un espacio vectorial con un producto lorentziano y sea $v \in V$.

1. $\vec{0}$ es tipo espacio pues $g|_{\langle 0 \rangle}$ es definido positivo ya que $\{0_V\}$ no tiene base.
2. V es tipo espacio si y solo si $g(v, v) > 0, \forall v \in V$.
3. V es tipo luz si y solo si $g(v, v) = 0$.
4. V es tipo tiempo si y solo si $g(v, v) < 0$.

Ejemplo 2.2.4. Un subespacio W es tipo espacio si y solo si todos sus vectores son tipo espacio. W es tipo luz si contiene un vector tipo luz pero no contiene un vector tipo tiempo. Por otro lado, W es tipo tiempo si contiene un vector tipo tiempo.

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $W \leq V$ subespacio vectorial de dimensión $k \leq n$, se define $W^\perp = \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$, donde $W^\perp \leq V$ subespacio vectorial $(n - k)$ -dimensional, $W^{\perp\perp} = W$ y $V = W \oplus W^\perp$ si $g|_W$ es no degenerado. (ver [12], cap 1.1)

Proposición 2.2.5. *Sea W un subespacio de V .*

1. *W es tipo tiempo si y solo si $W^\perp$ es tipo espacio, y W es tipo espacio si y solo si $W^\perp$ es tipo tiempo.*
2. *W es tipo luz si y solo si $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ si y solo si $W^\perp$ es tipo luz.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ Supongamos que W es tipo tiempo, entonces existe $w \in W$ tipo tiempo el cual podemos suponer unitario. Completando una base ortonormal de V de la forma $\{w, e_2, \dots, e_n\}$, donde $g(w, w) = -1$, y dado que $W^\perp \subseteq \text{gen}\{e_2, \dots, e_n\}$ y $g|_{\langle e_2, \dots, e_n \rangle}$ es definido positivo, entonces $\text{gen}\{e_2, \dots, e_n\}$ es tipo espacio. Luego $W^\perp$ lo es.

$\Leftarrow$ Supongamos que $W^\perp$ es tipo espacio y sea $v \in V$ tipo tiempo. Dado $V = W \oplus W^\perp$, entonces $v = w + w^\perp$. Así

$$\begin{aligned} g(v, v) &= g(w, w) + 2g(w, w^\perp) + g(w^\perp, w^\perp) \\ &= g(w, w) + g(w^\perp, w^\perp). \end{aligned}$$

Luego $g(w, w) = g(v, v) - g(w^\perp, w^\perp) < 0$. Así $w \in W$ es tipo tiempo y por lo tanto W es tipo tiempo. Lo que sigue de 1. se obtiene de $W^{\perp\perp} = W$.

2. $\Rightarrow$ Para probar el tercer enunciado, notemos que W tipo luz implica que $w_0 \in W$ vector tipo luz que no es tipo tiempo, entonces para todo $a \in \mathbb{R}$, $w \in W$ se tiene que

$$g(w + aw_0, w + aw_0) = g(w, w) + 2ag(w, w_0) \geq 0.$$

Dado que $a \in \mathbb{R}$ es arbitrario, tenemos que $g(w, w_0) = 0, \forall w \in W$, entonces $w_0 \in W^\perp$ y por lo tanto $W \cap W^\perp \neq \{0\}$.

$\Leftarrow$ Por otro lado, consideremos que si $0 \neq w_0 \in W \cap W^\perp$, entonces w_0 es tipo luz. Dado que W no puede contener un vector tipo tiempo debido al primer enunciado, entonces W es tipo luz por Ejemplo 2.2.4. El resto se sigue de $W^{\perp\perp} = W$. $\square$

Teorema 2.2.6. *Dos vectores tipo luz son ortogonales si y solo si son proporcionales.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sean $v, w \in V$ tipo luz y sea $e \in W \subset V$ tipo tiempo. Supongamos que $g(v, w) = 0$. Se debe de tener que $g(e, v) \neq 0$, pues en caso contrario implicaría que $e \in W^\perp$. Esto es, que e es tipo espacio, lo que es una contradicción.

Por otro lado, para $a = -\frac{g(e, w)}{g(e, v)} \in \mathbb{R}$ tenemos que $g(e, w + av) = 0$ dado que $g(e, w) + ag(e, v) = 0$, así tenemos que $w + av$ es tipo espacio. Luego

$$g(w + av, w + av) = g(w, w) + 2ag(w, v) + a^2g(v, v),$$

lo que implica $w + av = 0$, esto es, $w = -av$. Por lo tanto v y w son proporcionales.

$\Leftarrow$ Por otro lado, si v y w son proporcionales, entonces $w = av$, para algún $a \in \mathbb{R}$. Luego

$$g(v, w) = ag(v, v),$$

por lo tanto v y w son ortogonales. □

Definición 2.2.7. *Sea (M, g) una variedad lorentziana y sea $\phi: N \rightarrow M$ una inmersión. Si $\phi_*(T_p N) \subseteq T_{\phi(p)} M$ tiene el mismo carácter causal para todo $p \in N$. Diremos que este es el carácter causal de la inmersión ϕ y su imagen $\phi(N) \subseteq M$.*

Esta definición es usada para curvas en M , campos vectoriales sobre M , en particular, un campo vectorial X definido sobre $U \subseteq M$ es tipo tiempo (respectivamente tipo luz, tipo espacio) si y solo si para todo $p \in U$, X_p es tipo tiempo (respectivamente tipo luz, tipo espacio).

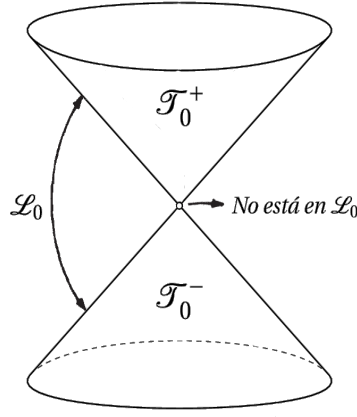
Sea ω una 1-forma definida en $U \subseteq M$ y X un campo vectorial físicamente equivalente a ω . Si X posee un carácter causal, es asignado a ω . Por ejemplo, si X es un campo vectorial tipo luz, entonces $g(X, \cdot)$ es una 1-forma diferencial tipo luz.

El conjunto $\mathcal{L}_0 \subseteq M$ de todos los vectores tipo luz es llamado cono de luz en V .

Proposición 2.2.8. *El cono de luz $\mathcal{L}_0$ es una variedad tipo luz.*

Ejemplo 2.2.9. *Sea $N = 3$ y $\{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal, entonces $v \in \mathcal{L}_0$ si y solo si sus componentes cumplen que $(v^3)^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 > 0$.*

Así realmente $\mathcal{L}_0$ es representado por un cono sin el origen. Los vectores tipo tiempo cumplen $(v^3)^2 > (v^1)^2 + (v^2)^2$ y ellos son representados por los puntos dentro de $\mathcal{L}_0$ y tienen 2 componentes conexas $\mathcal{T}_0^+$ y $\mathcal{T}_0^-$.



En general para espacios Lorentzianos n -dimensionales, el conjunto $\mathcal{T}_0$ de los vectores tipo tiempo es una variedad abierta con 2 componentes conexas $\mathcal{T}_0^+$ y $\mathcal{T}_0^-$, cada una difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ y para $n \geq 3$ el cono de luz también se divide en 2 componentes conexas $\mathcal{L}_0^+$ y $\mathcal{L}_0^-$, cada una difeomorfa a $\mathbb{R} \times S^{n-2}$.

Una variedad de Lorentz (M, g) se dice que admite una orientación temporal si es posible elegir una componente conexa $\mathcal{T}_0^+$ de $\mathcal{T}_0$ para cada $p \in M$ de manera que en cada carta U de M existe un campo vectorial diferenciable X tal que $X_p \in \mathcal{T}_0^+$. La elección efectiva de $\mathcal{T}_0^+$ para cada p se denomina orientación temporal de M .

Definición 2.2.10. *Un espacio-tiempo es una tripleta (M, g, ∇) donde la variedad M es C^∞ , conexa y haussdorff, ∇ es la conexión de Levi-Civita, (M, g) es lorentziana, orientable y orientable temporalmente. Es decir, $\mathcal{T} = \{(p, X_p) \in TM \mid (p, X_p) \text{ es tipo tiempo}\}$ tiene dos componentes conexas.*

Hasta aquí, tenemos lo necesario respecto a estructura para la formulación de la teoría general de Einstein. Hemos visto que la conexión compatible con la métrica nos

permite determinar la curvatura a través del tensor de Riemann. En este punto, no hemos determinado la métrica correspondiente a un sistema físico en específico.

Recordando que el tensor de curvatura de Riemann está dado por $R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$, mientras que el tensor de Ricci por $R_{ik} dx^i \otimes dx^k$, y por otro lado, el tensor de curvatura escalar S está dado por $R = g^{jk} R_{jk}$, introduciremos un nuevo tensor de relevancia para nuestro propósito usando la notación respecto de las componentes de dicho tensor.

Definición 2.2.11. *El tensor gravitacional de Einstein de un espacio-tiempo M es*

$$G = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R.$$

Observación: en geometría diferencial se estudian variedades de Einstein, es decir, que satisfacen que $G = 0$.

Pero, ¿cómo se relaciona el tensor de energía T_{ab} con el tensor de curvatura G ? Einstein responde a esta pregunta con la propuesta de la fórmula

$$G = k T_{ab}, \quad \text{con } k \text{ constante.}$$

Note que G es un $(0, 2)$ -tensor simétrico. Por otro lado, para obedecer a la ley de la conservación de la energía-momento debe verificar $\text{div} T_{ij} = 0$, entonces $G = k T_{ab}$ implica $\text{div} G = 0$.

Observación: algunos textos se refieren a $\text{div} T_{ij} = 0$ por $\nabla_i T^{ij} = 0$ mientras que otros por $\nabla^i T_{ij} = 0$ por la equivalencia física entre $\nabla_i T^{ij}$ y $\nabla^i T_{ij}$, ver [3]. Convendremos en usar $\nabla^i T_{ij}$. Además, para T un $(0, 2)$ -tensor simétrico se tiene que $\text{div} T$ corresponde a la traza de la derivada covariante de T , por lo que tiene sentido probar que la derivada covariante del tensor T se anula pues implica que la divergencia del tensor también se anula.

Así, necesitamos que G de la Definición 2.2.11 sea compatible con esta restricción. Para ello, consideremos la siguiente identidad

Proposición 2.2.12.

$$\nabla^a \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = 0. \quad (2.1)$$

Demostración. De la segunda identidad de Bianchi tenemos

$$\nabla_m R_{ijk}^l + \nabla_k R_{imj}^l + \nabla_j R_{ikm}^l = 0,$$

al contraer $j = l$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_m R_{ilk}^l + \nabla_k R_{iml}^l + \nabla_l R_{ikm}^l \\ &= \nabla_m R_{ik} - \nabla_k R_{ilm}^l + \nabla_l R_{ikm}^l \\ &= \nabla_m R_{ik} - \nabla_k R_{im} + \nabla_l R_{ikm}^l \end{aligned}$$

y multiplicando por g^{im}

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_m g^{im} R_{ik} - \nabla_k g^{im} R_{im} + \nabla_l g^{im} R_{ikm}^l \\ &= \nabla_m R_k^m - \nabla_k R + \nabla_l R_k^l, \end{aligned}$$

al contraer $m = l$

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_l R_k^l - \nabla_k R + \nabla_l R_k^l \\ &= \nabla_l R_k^l - \frac{1}{2} \nabla_k R, \end{aligned}$$

dado que $\nabla_l R_k^l = \nabla_l g^{sl} g_{ps} R_k^p = \nabla^s R_{sk}$, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^s R_{sk} - \frac{1}{2} g_{sk} \nabla^s R \\ &= \nabla^s \left(R_{sk} - \frac{1}{2} g_{sk} R \right), \end{aligned}$$

cambiando por los índices adecuados, se tiene lo buscado. $\square$

Einstein propuso varias posibilidades para G , probándolas notablemente en el problema de la precesión del perihelio de Mercurio, dando lugar a

$$R_{ab} = k \left(T_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} R \right),$$

donde R_{ab} es el tensor de Ricci, dando lugar al tensor conocido y definido en 2.2.11.

Observación: no cualquier espacio-tiempo es un modelo para la relatividad general. Se debe pedir que cumplan las ecuaciones de la Definición 2.2.11.

Definición 2.2.13. Si M es un espacio-tiempo que contiene materia con tensor de energía-momento T_{ab} , entonces la ecuación de Einstein es

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}.$$

Donde R_{ab} es el tensor de Ricci, R la curvatura escalar y la constante universal $k = 8\pi$ es determinada por comparación a la teoría de Newton. [ver [10], p. 406]

El lado izquierdo de las ecuaciones de Einstein es geométrica y el lado derecho depende del contenido físico del modelo, por ejemplo T_{ab} puede representar un campo electromagnético, un fluido o incluso ser 0 ante la ausencia de contenido material. Las ecuaciones de Einstein entre otras muchas cosas nos dice que conociendo la materia en alguna parte del universo podemos conocer la curvatura del espacio tiempo, y viceversa. Notemos también que si conocemos g , podemos definir T_{ab} usando las ecuaciones de Einstein, pero esto no sería interesante pues T_{ab} no tendría necesariamente un contenido físico. Si $T_{ab} = 0$ tenemos que $R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0$, formando un sistema de 10 ecuaciones no lineales de segundo orden para las componentes g_{ab} . Dicho sistema tiene soluciones no triviales y que calcularemos ante las condiciones establecidas.

También vale la pena destacar que esta interacción entre la materia y la curvatura determinada por las ecuaciones de Einstein, no se derivan de principios previos, sino mas bien forman un modelo conjeturado que describe fenómenos físicos que involucra la interacción gravitacional y la exactitud de dicho modelo solo puede comprobarse mediante la comparación con el experimento y la observación. Además, existen soluciones explícitas a las ecuaciones de Einstein a pesar de su dificultad. Toda solución explícita tiene algún tipo de simetría.

Podemos resumir, los postulados de la relatividad general de la siguiente manera:

- El espacio-tiempo está dado según la Definición 2.2.10,

- Las luz se desplaza por la superficie del cono y las partículas por dentro del cono,
- La energía, la cantidad de movimiento y la tensión de las distribuciones continuas de materia en el espacio se describen mediante un tensor simétrico T_{ab} tal que $\nabla^a T_{ab} = 0$ debido a la ley de conservación de la energía-momento.
- La curvatura está relacionada con la masa y energía mediante las ecuaciones de Einstein de la Definición 2.2.13.

2.3. Ejemplos de espacio-tiempo

Introduciremos brevemente el espacio-tiempo de Minkowski, usado para describir fenómenos físicos en la Teoría Especial de la Relatividad. Y luego introduciremos el espacio-tiempo de Schwarzschild y las condiciones de las que partió Karl Schwarzschild para solucionar las ecuaciones de Einstein.

2.3.1. Espacio - tiempo de Minkowski

El espacio - tiempo de Minkowski $M = \mathbb{R}^4$ con la métrica

$$g = -du^1 \otimes du^1 + \sum_{i=2}^4 du^i \otimes du^i.$$

(M, g) está orientada temporalmente por $\frac{\partial}{\partial u^1}$ y orientada según la orientación inducida por la base ordenada (e_1, e_2, e_3, e_4) . La conexión ∇ es trivial y $R_{ijkl} \equiv 0$, razón por la cuál se dice que este espacio-tiempo es plano. En este caso, $G = 0$ por lo que $kT_{ij} = 0$. Por lo tanto el espacio-tiempo de Minkowski representa un universo vacío, sin contenido material.

Este espacio es importante pues localmente podemos identificar vecindades pequeñas de un espacio-tiempo con un espacio de Minkowski.

Dada la métrica $g = g_{ij} du^i \otimes du^j$, expandiendo y dado que $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$, entonces

$$g = -g_{11} du^1 \otimes du^1 + g_{22} du^2 \otimes du^2 + g_{33} du^3 \otimes du^3 + g_{44} du^4 \otimes du^4.$$

En coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , tenemos

$$u^1 = t, \quad u^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad u^3 = r \sin \theta \cos \phi, \quad u^4 = r \cos \theta,$$

luego

$$g_{11} = 1,$$

$$\begin{aligned} g_{22} &= \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{33} &= r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 (-\sin \theta)^2 \\ &= r^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{44} &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta (-\sin \phi)^2 \\ &= r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

así la métrica g en nuestro nuevo sistema de coordenadas es

$$g = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.2)$$

Notemos que en estas coordenadas los símbolos de Christoffel no son cero, sin embargo los tensores de curvatura de Riemann y de curvatura de Ricci satisfacen $R_{ijkl} = 0$, $R_{ij} = 0$ y $R = 0$. La matriz de la métrica es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Si $\sin \theta = 0$ y $r = 0$ (caso que no se puede dar), la matriz de la métrica es singular. Esto significa que no podemos usar solo una carta de coordenadas para cubrir a M .

Generalmente tomamos cartas en coordenadas polares con dominio

$$0 < r < \infty, 0 < \theta < \pi \quad \text{y} \quad 0 < \phi < 2\pi.$$

2.3.2. Espacio - tiempo de Schwarzschild

Partamos de las conocidas ecuaciones de campo $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 8\pi T_{ij}$.

Si el tensor de energía $T_{ij} = 0$, el espacio presenta ausencia de materia (energía). Las soluciones de Schwarzschild fueron encontradas usando simetrías, estas soluciones modelan el campo gravitacional fuera de un cuerpo esféricamente simétrico en el cual se supone ausencia de materia.

Sea (S^2, h) la esfera unitaria con h la métrica estándar y consideremos $m \in (0, \infty)$. En $\mathbb{R}^2$ consideramos las coordenadas (u^1, u^2) donde $u^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2$, y h la métrica usual de $\mathbb{R}^2$. Sea $A = (u^1)^{-1}[(0, 2m) \cup (2m, \infty)]$. Así $A \subset \mathbb{R}^2$ es abierto y tiene 2 componentes conexas. Definimos $M = S^2 \times A$ y sean las proyecciones $P : M \rightarrow S^2$ y $Q : M \rightarrow A$. Definamos $r = u^1 \circ Q : M \rightarrow (0, 2m) \cup (2m, \infty)$, y $t = u^2 \circ Q : M \rightarrow \mathbb{R}$, donde $r(p, (u^1, u^2)) = u^1(u^1, u^2) = u^1$ y $t(p, (u^1, u^2)) = u^2$.

Se tiene $(1 - \frac{2m}{r})$ es una función de clase C^∞ de M sobre $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Como veremos en la siguiente sección, la métrica de Schwarzschild es de la forma

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2 P^* h,$$

la función r es un radio y t se interpreta como tiempo, los campos vectoriales $\frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial t}$ son tipo espacio y tiempo, respectivamente, donde $P_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0 = P_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)$ y $Q_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial u^1}$, $Q_*\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial u^2}$.

Notemos que $M = S^2 \times A$ no es conexo, pero considerando $N = r^{-1}(2m, \infty)$ componente conexa y $g|_N$ la métrica lorentziana orientada y orientable temporalmente por $\frac{\partial}{\partial t}$, se tiene el espacio-tiempo de Schwarzschild $(N, g|_N)$, de masa $8\pi m$.

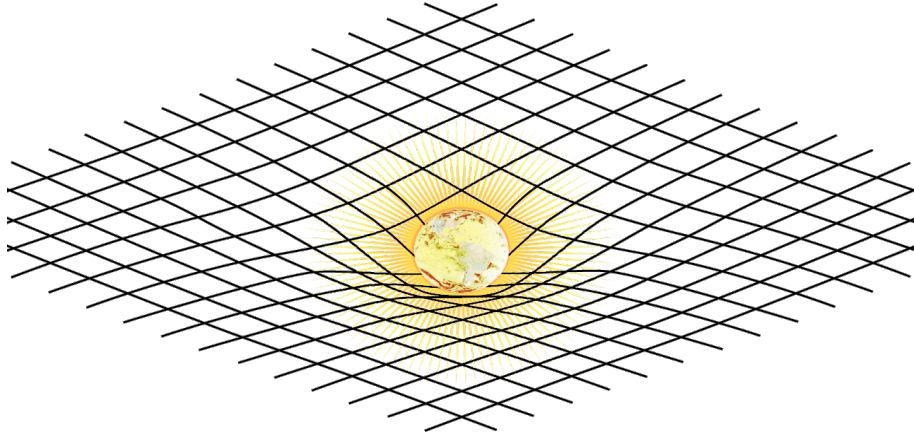
Físicamente si consideramos una estrella esféricamente simétrica de radio r_0 y masa $\bar{M} = 8\pi m$ con $r_0 \gg \bar{M}$, entonces la subvariedad U de N definida para $r > r_0$ modela

la historia completa del exterior de la estrella. Dicha estrella se supone que no rota y que no está cargada electricamente. Estos casos son más complicados y están incluidos en la solución de Kerr. [Ver [10]]

Calculando el pull back P^*

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

La solución (N, g) es esféricamente simétrica, es decir, es invariante bajo la acción de $SO(3)$ sobre la esfera $S^2(r_0)$. g es asintóticamente plana, es decir, $g_{ij} = \eta_{ij} + \Theta\left(\frac{1}{r}\right)$ donde η_{ij} son los componentes de la métrica de Minkowski. Como la masa es independiente del radio, para $r \rightarrow \infty$ se tiene que el límite en las coordenadas de tiempo y radio tiende a 1 y así $g \approx -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$.



Más concretamente, en la sección 2.4 probaremos el siguiente teorema

Teorema 2.3.1. *Si una solución de las ecuaciones $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = 0$ es esféricamente simétrica, entonces es localmente isométrica a la métrica de Schwarzschild*

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad t \in \mathbb{R}, r \neq 0 \text{ y } r \neq 2m.$$

Para probar que la métrica de Schwarzschild es solución a las ecuaciones de Einstein, se deben calcular las componentes del tensor métrico según las condiciones propias del problema. Este resultado es conocido como teorema de Birkhoff.

En resumen, para (M, g) tenemos las siguientes propiedades:

1. $\frac{\partial}{\partial t}$ es un campo vectorial tipo tiempo.
2. (M, g) es orientable temporalmente.
3. $M = S^2 \times A \subset S^2 \times \mathbb{R}^2$
4. $g_{ij} \approx \eta_{ij} + \Theta\left(\frac{1}{r}\right)$, con η_{ij} la métrica de Minkowski. Es decir, g es asintóticamente plana.
5. Cualquier solución a las ecuaciones de Einstein que sean esféricamente simétricas son localmente Schwarzschild.

En general, consideramos g para $r > r_0 > 2m$ como la solución fuera del cuerpo esférico de radio r , donde $2m$ representa el radio de la estrella. La métrica en el interior del cuerpo está determinada por el tensor de energía del cuerpo, así una primera restricción es $r > 2m$.

La métrica es singular para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, o bien cuando $r = 0$, $r = 2m$. Aquí $\theta = 0$, $\theta = \pi$ son singularidades triviales debido a las coordenadas polares para $0 < \theta < \pi$, mientras que los puntos $r = 0$ y $r = 2m$ los debemos quitar del dominio de coordenadas. Si $m > 0$ cualquier curva continua que comience en la región $r < 2m$ tiene que cruzar $r = 2m$ antes de llegar al "mundo exterior", donde se permite que $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto quitamos la hipersuperficie llamada horizonte de sucesos $r = 2m$ de nuestra variedad y esto transforma a M en $\mathbb{R} \times \{(0, 2m) \cup (2m, \infty)\} \times S^2$. Dado que M es conexo, debemos escoger un tramo del dominio de r y como la región $r > 2m$ representa el "mundo exterior," la estrella, finalmente nos quedamos con $M = \mathbb{R} \times (2m, \infty) \times S^2$.

Observación: no existen métricas de Lorentz que extiendan la métrica de Schwarzschild a través de $r = 0$. [Ver [13]]

¿Será posible extender M a otro espacio tiempo tal que (M, g) está isométricamente inscrustada en el nuevo espacio tiempo (M', g') ? Extenderemos M , extendiendo el dominio de la coordenada r más allá de $r = 2m$, es decir, al interior de la estrella. Para

ello, definamos la llamada coordenada "tortuga"

$$\begin{aligned} r^* &= \int \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \\ &= r + 2m \ln(r - 2m), \end{aligned}$$

y sea $v = t + r^*$. Así $dv = dt + dr^*$ por lo que $dr^* = dv - dt$. Además tenemos que $dr^* = \frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} dr$ y $dt = dv - dr^*$.

Ahora, escribamos g en términos de (v, r, θ, ϕ)

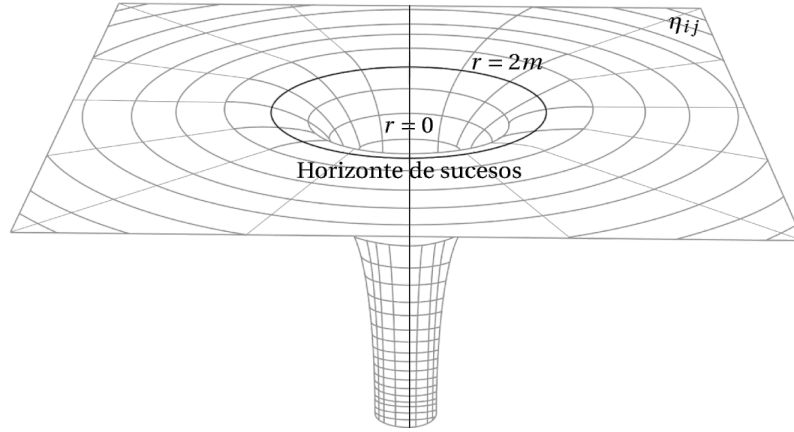
$$\begin{aligned} g &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dv^2 - 2dvdr^* + d(r^*)^2 + dvdr^* + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dvdr^* - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d(r^*)^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) d(r^*)^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \end{aligned} \tag{2.3}$$

con $\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dr^* = dr$. Claramente la matriz de la métrica es

$$\begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Notemos que la ecuación (2.3) permite que $r = 2m$, pues la matriz sigue siendo invertible, luego podemos extender nuestro espacio-tiempo a $\mathbb{R} \times (0, \infty) \times S^2$, lo que nos sugiere que la singularidad $r = 2m$ es simplemente una elección "no adecuada" de coordenadas. Intuitivamente, esto se comprueba porque ningún polinomio escalar del tensor de curvatura diverge cuando $r \rightarrow 2m$ y por otra parte, cuando $r \rightarrow 0$ se tiene que $R_{ijkl} \rightarrow \infty$, fenómeno llamado espaguetización.

(v, r, θ, ϕ) son llamadas coordenadas Eddington - Finkelstein, y su extensión nos señala que $r = 0$ es una singularidad, es decir que no es posible extender el espacio tiempo para $r = 0$. Si $r \rightarrow 0$ estamos en presencia de un agujero negro.



Si $r > 2m$, entonces $\frac{\partial}{\partial t}$ es tipo tiempo y $\frac{\partial}{\partial r}$ es tipo espacio, mientras que si $r < 2m$ entonces $\frac{\partial}{\partial t}$ es tipo espacio y $\frac{\partial}{\partial r}$ es tipo tiempo. Esto implica que un observador que pasa la barrera $r = 2m$ no puede devolverse, por esto la hipersuperficie $\mathbb{R} \times \{r = 2m\} \times S^2$ se llama horizonte de sucesos.

Definición 2.3.2. La región $\{r \leq 2m\}$ para la métrica (2.3) es una región de agujero negro, en el sentido de que los observadores o las señales pueden entrar en esta región, pero nunca salir de ella.

2.4. La solución de Schwarzschild

Consideremos un cuerpo esférico (una estrella o agujero negro) de masa m centrado en el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^3$. El campo gravitatorio que produce se representará por una métrica, que sustituirá a la de Minkowski, que tendremos que calcular. En el exterior de la estrella el tensor de energía T_{ij} es nulo y por tanto el tensor de Ricci de la métrica ha de ser nulo. Por la naturaleza del cuerpo, es lógico suponer que el espacio-tiempo que buscamos tiene simetría esférica lo que significa que podemos escribir la métrica de espacio-tiempo en coordenadas esféricas como

$$g = -Udt^2 + Vdr^2 + r^2(Sd\theta^2 + Q\sin^2\theta d\phi^2),$$

donde U, V, S, Q son funciones que debemos determinar bajo las condiciones del problema:

1. **Simetría esférica:** Las funciones no dependen de θ ni de ϕ . Además, la parte angular de la métrica debería tener $S = Q$.
2. **Estática:** La simetría esférica implica en el vacío y localmente, la existencia de dos simetrías: traslaciones en la coordenada t y reflexiones del tipo $t \mapsto -t$, donde $1 - \frac{2m}{r} > 0$. Una métrica con estas dos propiedades se llama estática. Así, cualquier derivada respecto a t de cualquier componente métrico se anula.
3. **Solución en el vacío:** Fuera del cuerpo que es fuente de curvatura no hay materia o energía. Es decir, tenemos que $T_{ij} = 0$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer a $S = Q = 1$. Así la forma de las soluciones de Einstein en su forma limitada viene dada por

$$g = -Udt^2 + Vdr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$

donde tenemos la matriz de la métrica

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} -U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{U} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{V} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}.$$

Ahora, usando la ecuación de Einstein

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 8\pi T_{ij}$$

hallaremos las funciones U y V . Para ello, deberemos calcular los tensores de Ricci R_{ij} y el tensor escalar R por lo que primero, usando la ecuación (1.7) calcularemos todos los símbolos de Christoffel, considerando las propiedades de simetría dada las condiciones del problema.

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left(\cancel{\frac{\partial g_{00}}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial g_{00}}{\partial t}} - \cancel{\frac{\partial g_{00}}{\partial t}} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0j}^0 = \Gamma_{j0}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + \cancel{\frac{\partial g_{0j}}{\partial t}} - \cancel{\frac{\partial g_{0j}}{\partial t}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x^j}, \end{aligned}$$

de aquí notemos que dado que U es función de r . (Para $j = 1$ no se anula)

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial r},$$

mientras para $j \neq 1$

$$\Gamma_{0j}^0 = \Gamma_{j0}^0 = 0.$$

Si ahora consideramos $i \neq j \neq 0$, obtenemos

$$\Gamma_{ij}^0 = \Gamma_{ji}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \cancel{\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\cancel{\frac{\partial g_{10}}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial g_{10}}{\partial t}} - \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \right) \\
&= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{V} \frac{\partial U}{\partial r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial g_{11}}{\partial r}} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial \theta}} - \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \right) \\
&= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{V} \frac{\partial r^2}{\partial r} \\
&= -\frac{r}{V},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial \phi}} + \cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial \phi}} - \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) \\
&= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \\
&= -\frac{1}{2} \frac{1}{V} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \\
&= -\frac{r \sin^2 \theta}{V},
\end{aligned}$$

considerando $j \neq 0$, tenemos

$$\Gamma_{0j}^1 = \Gamma_{j0}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\cancel{\frac{\partial g_{10}}{\partial x^j}} + \cancel{\frac{\partial g_{1j}}{\partial t}} - \cancel{\frac{\partial g_{0j}}{\partial r}} \right) = 0,$$

considerando $i \neq j$ y que V depende solo de r (En particular $i \neq j \neq 1$), entonces

$$\Gamma_{ij}^1 = \Gamma_{ji}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{1j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial r} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\cancel{\frac{\partial g_{20}}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial g_{20}}{\partial t}} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{00}}{\partial \theta} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ahora, si tenemos que $i=j$

$$\Gamma_{ii}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{2i}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{2i}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial \theta} \right),$$

notemos que para $i = 1$ se anula, mientras que para $i = 2$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} + \cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{\partial g_{22}}{\partial \theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial \theta} \\ &= 0, \end{aligned}$$

para $i = 3$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\cancel{\frac{\partial g_{23}}{\partial \phi}} + \cancel{\frac{\partial g_{23}}{\partial \phi}} - \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \\ &= -\sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial \theta}} + \frac{\partial g_{22}}{\partial r} - \cancel{\frac{\partial g_{12}}{\partial \theta}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \\
 &= \frac{1}{r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{13}^2 = \Gamma_{31}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\cancel{\frac{\partial g_{21}}{\partial \theta}} + \cancel{\frac{\partial g_{23}}{\partial r}} - \cancel{\frac{\partial g_{13}}{\partial \theta}} \right) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \phi} + \cancel{\frac{\partial g_{23}}{\partial \theta}} - \cancel{\frac{\partial g_{23}}{\partial \theta}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial \phi} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial \phi} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\cancel{\frac{\partial g_{30}}{\partial t}} + \cancel{\frac{\partial g_{30}}{\partial t}} - \frac{\partial g_{00}}{\partial \phi} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{00}}{\partial \theta} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

para $j \neq 0$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0j}^3 = \Gamma_{j0}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\cancel{\frac{\partial g_{30}}{\partial x^j}} + \frac{\partial g_{3j}}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial g_{0j}}{\partial \phi}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{33} \cancel{\frac{\partial g_{33}}{\partial t}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

mientras que para $i \neq 0$ y dado que $g_{ij} \neq 0$ si y solo si $i = j$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ii}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{3i}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{3i}}{\partial x^i} - \cancel{\frac{\partial g_{ii}}{\partial \phi}} \right) \\ &= g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \phi} \\ &= 0,\end{aligned}$$

por otro lado, para $i \neq j$

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^3 = \Gamma_{ji}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{3i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{3j}}{\partial x^i} - \cancel{\frac{\partial g_{ij}}{\partial \phi}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{3i}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{3j}}{\partial x^i} \right),\end{aligned}$$

basta fijar $j = 3$ con $i \neq 3$ para obtener los que no se anulan.

$$\begin{aligned}\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\cancel{\frac{\partial g_{31}}{\partial \phi}} + \frac{\partial g_{33}}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2} g^{33} \left(\cancel{\frac{\partial g_{32}}{\partial \phi}} + \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \\
&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= \cot \theta.
\end{aligned}$$

Ahora, debemos calcular los tensores de Ricci, expresados en términos de los símbolos de Christoffel, sabemos que

$$R_{ij} = R_{ikj}^k = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{km}^k - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^k - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^k, \quad (2.4)$$

expandiendo la suma

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ij}^0} + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{0m}^0 - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{i0}^m \Gamma_{jm}^0 + \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{ij}^1 + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{1m}^1 - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{i1}^1 - \Gamma_{i1}^m \Gamma_{jm}^1 \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_{ij}^2 + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{2m}^2 - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{i2}^2 - \Gamma_{i2}^m \Gamma_{jm}^2 + \frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_{ij}^3 + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{3m}^3 - \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{i3}^3 - \Gamma_{i3}^m \Gamma_{jm}^3, \quad (2.5)
\end{aligned}$$

ahora, calcularemos los términos R_{ij} con $i \neq j$ y $j \neq 0$.

$$\begin{aligned}
R_{0j} &= \Gamma_{0j}^m \Gamma_{0m}^0 - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{00}^0} - \Gamma_{00}^m \Gamma_{jm}^0 + \cancel{\frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{0j}^1} + \Gamma_{0j}^m \Gamma_{1m}^1 - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{01}^1} - \Gamma_{01}^m \Gamma_{jm}^1 \\
&\quad + \cancel{\frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_{0j}^2} + \Gamma_{0j}^m \Gamma_{2m}^2 - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{02}^2} - \Gamma_{02}^m \Gamma_{jm}^2 + \cancel{\frac{\partial}{\partial \phi} \Gamma_{0j}^3} + \Gamma_{0j}^m \Gamma_{3m}^3 - \cancel{\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{03}^3} - \Gamma_{03}^m \Gamma_{jm}^3,
\end{aligned}$$

mientras que para aquellos términos que no se anulan, tenemos

$$\Gamma_{0j}^m \Gamma_{0m}^0 = 0 \text{ si } m = 0, 2, 3. \text{ Y para } m = 1 \text{ tenemos } \cancel{\Gamma_{0j}^1} \Gamma_{01}^0 = 0,$$

$$\Gamma_{00}^m \Gamma_{jm}^0 = 0 \text{ si } m = 0, 2, 3. \text{ Y para } m = 1 \text{ y } j \neq 0 \text{ tenemos } \Gamma_{00}^1 \cancel{\Gamma_{j1}^0} = 0.$$

Análogamente, tenemos

$$\Gamma_{0j}^m \Gamma_{1m}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{0j}^m \Gamma_{2m}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{0j}^m \Gamma_{3m}^3 = 0,$$

$$\Gamma_{01}^m \Gamma_{jm}^1 = 0 \text{ si } m = 1, 2, 3, \text{ mientras que para } m = 0 \text{ y } j \neq 0 \text{ tenemos } \Gamma_{01}^0 \Gamma_{j0}^1 \neq 0.$$

Luego

$$R_{0j} = 0, \text{ para } j \neq 0.$$

Para R_{ij} con $i \neq j$ con ningún termino cero, consideremos (2.5). Notemos que revisando término a término

$$\Gamma_{ij}^m \Gamma_{0m}^0 \neq 0 \text{ si } m = 1, \text{ luego } \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{01}^0 \neq 0 \text{ si } i = j,$$

$$\Gamma_{i0}^0 \neq 0 \text{ si } i = 1. \text{ Así } \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{10}^0 = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{2U} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \text{ si } j \neq 1 = i,$$

$$\Gamma_{jm}^0 \neq 0 \text{ si } m = 0 \text{ y } j = 1, \text{ luego } \Gamma_{i0}^0 \Gamma_{10}^0 \neq 0 \text{ si } i = j = 1,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{ij}^1 = 0, \text{ pues } \Gamma_{ij}^1 \neq 0 \text{ si } i = j,$$

$$\Gamma_{ij}^m \Gamma_{1m}^1 \neq 0 \text{ si } \Gamma_{1m}^1 = 0 \text{ si } m = 1, \text{ entonces } \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{11}^1 \neq 0 \text{ si } \Gamma_{ij}^1 \neq 0 \text{ si } i = j,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{i1}^1 \neq 0 \text{ si } i = 1, \text{ pero } \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial r} \right) \neq 0 \text{ si } i = j = 1,$$

dado que

$$\Gamma_{i1}^m \Gamma_{jm}^1 = \Gamma_{i1}^0 \Gamma_{j0}^1 + \Gamma_{i1}^1 \Gamma_{j1}^1 + \Gamma_{i1}^2 \Gamma_{j2}^1 + \Gamma_{i1}^3 \Gamma_{j3}^1,$$

y como

$$\Gamma_{j0}^1 \neq 0 \text{ si } j = 0, \text{ entonces } \Gamma_{i1}^0 \Gamma_{j0}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{i1}^1 \neq 0 \text{ si } i = 1, \text{ luego } \Gamma_{11}^1 \Gamma_{j1}^1 \neq 0 \text{ si } i = j = 1, \text{ entonces } \Gamma_{i1}^1 \Gamma_{j1}^1 = 0 \text{ para } i \neq j,$$

$$\Gamma_{j2}^1 \neq 0 \text{ si } j = 2, \text{ entonces } \Gamma_{i1}^2 \Gamma_{j2}^1 \neq 0 \text{ si } i = j = 2. \text{ Así } \Gamma_{i1}^2 \Gamma_{j2}^1 = 0 \text{ para } i \neq j,$$

$$\Gamma_{i1}^3 \neq 0 \text{ si } i = 3, \text{ luego } \Gamma_{31}^3 \Gamma_{j3}^1 \neq 0 \text{ si } i = j = 3, \text{ entonces } \Gamma_{i1}^3 \Gamma_{j3}^1 = 0 \text{ para } i \neq j,$$

por lo tanto

$$\Gamma_{i1}^m \Gamma_{jm}^1 = 0,$$

por otro lado

$$\Gamma_{ij}^2 \neq 0 \text{ si } i = j = 3, \text{ o bien si } i = 1 \text{ y } j = 2 \text{ (o viceversa). Como } \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r},$$

$$\text{luego } \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} = 0 \text{ y así } \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_{ij}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{ij}^m \Gamma_{2m}^2 \neq 0 \text{ si } m = 1, \text{ luego } \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{21}^2 \neq 0 \text{ si } i = j, \text{ entonces } \Gamma_{ij}^m \Gamma_{2m}^2 = 0 \text{ para } i \neq j,$$

$$\Gamma_{i2}^2 \neq 0 \text{ si } i = 1, \text{ así } \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{1}{r} \right) \neq 0 \text{ si } i = j = 1, \text{ luego } \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{i2}^2 = 0 \text{ para } i \neq j,$$

de otro modo, dado que

$$\Gamma_{i2}^m \Gamma_{jm}^2 = \cancel{\Gamma_{i2}^0 \Gamma_{j0}^2} + \Gamma_{i2}^1 \Gamma_{j1}^2 + \Gamma_{i2}^2 \Gamma_{j2}^2 + \Gamma_{i2}^3 \Gamma_{j3}^2,$$

tenemos

$$\Gamma_{i2}^1 \Gamma_{j1}^2 \neq 0 \text{ si } i = j = 2,$$

$$\Gamma_{i2}^2 \Gamma_{j2}^2 \neq 0 \text{ si } i = j = 1,$$

y

$$\Gamma_{i2}^3 \Gamma_{j3}^2 \neq 0 \text{ si } i = j = 3,$$

así, tenemos que

$$\Gamma_{i2}^m \Gamma_{jm}^2 = 0.$$

De otro lado, se tiene

$$\Gamma_{ij}^3 \neq 0 \text{ si } i = 2 \text{ y } j = 3 \text{ (o viceversa), o bien si } i = 1 \text{ y } j = 3, \text{ donde } \frac{\partial}{\partial \phi} \cot = 0 \text{ y } \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{r} = 0,$$

así

$$\Gamma_{ij}^3 = 0.$$

Al expandir los términos

$$\Gamma_{ij}^m \Gamma_{3m}^3 = \Gamma_{ij}^0 \cancel{\Gamma_{30}^3} + \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{ij}^3 \cancel{\Gamma_{33}^3},$$

y como

$$\Gamma_{ij}^1 \neq 0 \text{ si } i = j = 1, \text{ luego } \Gamma_{ij}^1 \Gamma_{31}^3 = 0, \text{ para } i \neq j,$$

y al expandir los términos no nulos, tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^2 \Gamma_{32}^3 &= \Gamma_{12}^2 \Gamma_{32}^3 + \Gamma_{21}^2 \Gamma_{32}^3 \\ &= \frac{1}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \cot \theta, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Gamma_{ij}^m \Gamma_{3m}^3 = \frac{2}{r} \cot \theta.$$

Además, notemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{i3}^3 \neq 0 \text{ si } i = 1 \text{ o si } i = 2. \text{ Como } \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{1}{r} \neq 0 \text{ si } i = j = 1, \text{ y } \frac{\partial}{\partial x^j} \cot \theta \neq 0 \text{ si } i = j = 2, \\ \text{luego } \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{i3}^3 = 0 \text{ para } i \neq j. \end{aligned}$$

Finalmente, expandiendo

$$\Gamma_{i3}^m \Gamma_{jm}^3 = \cancel{\Gamma_{i3}^0 \Gamma_{j0}^3} + \Gamma_{i3}^1 \Gamma_{j1}^3 + \Gamma_{i3}^2 \Gamma_{j2}^3 + \Gamma_{i3}^3 \Gamma_{j3}^3,$$

donde

$$\Gamma_{i3}^1 \Gamma_{j1}^3 \neq 0 \text{ si } i = j = 3,$$

$$\Gamma_{i3}^2 \Gamma_{j2}^3 \neq 0 \text{ si } i = j = 3,$$

$$\Gamma_{i3}^3 \Gamma_{j3}^3 \neq 0 \text{ si } i = 1 \text{ y } j = 2 \text{ (o viceversa),}$$

así

$$\begin{aligned} \Gamma_{i3}^m \Gamma_{jm}^3 &= \Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{13}^3 \\ &= \frac{1}{r} \cot \theta + \frac{1}{r} \cot \theta, \end{aligned}$$

por lo tanto, tenemos que para $i \neq j$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{2}{r} \cot \theta - \frac{2}{r} \cot \theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, veamos los tensores de tipo R_{ii} , con $i = 0, 1, 2, 3$.

$$R_{00} = \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{00}^0} + \Gamma_{00}^m \cancel{\Gamma_{0m}^0} - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{00}^0} - \cancel{\Gamma_{00}^m \Gamma_{0m}^0} + \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^m \Gamma_{1m}^1 - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{01}^1} - \Gamma_{01}^m \Gamma_{0m}^1 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \cancel{\Gamma_{00}^2} + \Gamma_{00}^m \Gamma_{2m}^2 - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{02}^2} - \cancel{\Gamma_{02}^m \Gamma_{0m}^2} + \frac{\partial}{\partial \phi} \cancel{\Gamma_{00}^3} + \Gamma_{00}^m \Gamma_{3m}^3 - \cancel{\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{03}^3} - \cancel{\Gamma_{03}^m \Gamma_{0m}^3},$$

así, considerando $m = 0, 1, 2, 3$ y los tensores que no se anulan ($m = 1$), tenemos

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{31}^3,$$

reemplazando cada símbolo de Christoffel correspondiente, obtenemos

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{2V} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2U} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r} + \frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r}.$$

Dado que

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2V} \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} V - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r}}{V^2} \right) \\ = \frac{1}{2V} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{2V^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r},$$

se tiene

$$R_{00} = \frac{1}{2V} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{4V^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4UV} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV} \frac{\partial U}{\partial r}. \quad (2.6)$$

Por otro lado, de (2,5) tenemos

$$R_{11} = \Gamma_{11}^1 \Gamma_{01}^0 - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{31}^3 - \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3 ,$$

al reemplazar y reducir, obtenemos

$$R_{11} = \frac{1}{4UV} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \left(\frac{2U \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2}{4U^2} \right) - \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \\ = \frac{1}{4UV} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV} \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (2.7)$$

Ahora, también de (2.5) se determinan los términos no nulos

$$R_{22} = \Gamma_{22}^1 \Gamma_{01}^0 + \frac{\partial}{\partial} \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{31}^3 - \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_{23}^3 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3 ,$$

reemplazando y considerando que $\frac{\partial \cot \theta}{\partial \theta} = -(\csc^2 \theta)$, tenemos

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{-r}{2UV} \frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{-V + r \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)}{V^2} \right) - \frac{r}{2V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) + 1 + \cot^2 \theta - \cot^2 \theta \\ &= \frac{-r}{2UV} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{V} + \frac{r}{2V^2} \frac{\partial V}{\partial r} + 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

De la misma manera, según (2.5)

$$R_{33} = \Gamma_{33}^1 \Gamma_{01}^0 + \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 ,$$

reemplazando y al reducir, tenemos

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{-r}{2UV} \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin^2 \theta}{V} + \frac{r \sin^2 \theta}{V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{r \sin^2 \theta}{2V^2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) + \sin^2 \theta \\ &= \left(\frac{-r}{2UV} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{V} + \frac{r}{2V^2} \frac{\partial V}{\partial r} + 1 \right) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.9)$$

Ahora buscaremos el escalar de Ricci $R = g^{ij} R_{ij}$. Reemplazando, tenemos

$$\begin{aligned}
 R &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\
 &= g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{22} \sin^2 \theta \\
 &= -\frac{1}{U} R_{00} + \frac{1}{V} R_{11} + \frac{1}{r^2} R_{22} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{22} \sin^2 \theta \\
 &= -\frac{1}{U} R_{00} + \frac{1}{V} R_{11} + \frac{2}{r^2} R_{22},
 \end{aligned}$$

luego reemplazando (2.6), (2.7) y (2.8) tenemos

$$\begin{aligned}
 R &= -\frac{1}{2UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4UV^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{4U^2 V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{rUV} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{4UV^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} \\
 &\quad - \frac{1}{2UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4U^2 V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV^2} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{rUV} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2}{r^2 V} + \frac{1}{rV^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2},
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$R = -\frac{1}{UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{2UV^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2U^2 V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{rUV} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{rV^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V} \right). \quad (2.10)$$

Dado que la solución de Schwarzschild concierne con el espacio tiempo exterior de una estrella esféricamente simétrica, fuera de la estrella no hay masa. Por lo que consideraremos $T_{ij} = 0$ y las ecuaciones de Einstein resultan

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0.$$

Esto nos lleva a 4 ecuaciones tensoriales de la forma

- $R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 0,$
- $R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = 0,$
- $R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R = 0,$
- $R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R = 0.$

Reemplazando los g_{ij} y R_{ij} obtenidos, resolvemos

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = R_{00} + \frac{U}{2}R,$$

reemplazando (2.6) y (2.10) se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2V} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{4V^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4UV} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV} \frac{\partial U}{\partial r} \\ &\quad + \frac{U}{2} \left(-\frac{1}{UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{2UV^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2U^2V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{rUV} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{rV^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2V} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{4V^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4UV} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV} \frac{\partial U}{\partial r} \\ &\quad - \frac{1}{2V} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4V^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{4UV} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{rV} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{rV^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{U}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V} \right) \\ &= \frac{U}{r} \left(\frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{V} \right) \right). \end{aligned}$$

Luego, de la primera ecuación tensorial obtenemos

$$0 = \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{V} \right). \quad (2.11)$$

Por otro lado, de la segunda ecuación tensorial se tiene

$$R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = R_{11} - \frac{V}{2}R,$$

reemplazando (2.7) y (2.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{4UV} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV} \frac{\partial V}{\partial r} \\ &\quad - \frac{V}{2} \left(-\frac{1}{UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{2UV^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2U^2V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{rUV} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{rV^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V} \right) \right) \\ &= \frac{1}{4UV} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rV} \frac{\partial V}{\partial r} \\ &\quad + \frac{1}{2U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{4UV} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{4U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{rU} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{rV} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V} \right), \end{aligned}$$

esto es,

$$0 = \frac{1}{rU} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V}\right),$$

multiplicando por $\frac{-r}{V}$ obtenemos

$$0 = -\frac{1}{UV} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{V}\right). \quad (2.12)$$

De otro modo, de la tercera ecuación tensorial se tiene

$$R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R = R_{22} - \frac{r^2}{2} R,$$

reemplazando (2.8) y (2.10)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-r}{2UV} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{V} + \frac{r}{2V^2} \frac{\partial V}{\partial r} + 1 \\ &\quad - \frac{r^2}{2} \left(-\frac{1}{UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{2UV^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2U^2V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 - \frac{2}{rUV} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2}{rV^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{1}{V}\right) \right) \\ &= \frac{r}{2UV} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{r}{2V^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{r^2}{2UV} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{r^2}{4UV^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{r^2}{4U^2V} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2, \end{aligned}$$

y multiplicando por $\frac{-2V}{r}$ obtenemos

$$0 = -\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{r}{U} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{r}{2UV} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} V + \frac{r}{2U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2. \quad (2.13)$$

Por otro lado, de la cuarta ecuación tensorial, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= R_{33} - \frac{1}{2} g_{33} R \\ &= R_{22} \sin^2 \theta - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{2} R \\ &= \sin^2 \theta \left(R_{22} - \frac{r^2}{2} R \right), \end{aligned}$$

y finalmente obtenemos

$$0 = R_{22} - \frac{r^2}{2} R. \quad (2.14)$$

Para resolver las ecuaciones, nos falta encontrar U y V explícitamente. Para ello, usaremos lo obtenido de las ecuaciones tensoriales anteriores, pues la primera ecuación (2.11) está en función solo de V

$$0 = \frac{1}{V^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{V-1}{V} \right)$$

$$-\frac{1}{r} = \frac{1}{V(V-1)} \frac{\partial V}{\partial r}.$$

Tenemos una ecuación diferencial separable

$$-\frac{\partial r}{r} = \frac{\partial V}{V(V-1)},$$

integrando y considerando que $\frac{1}{V(V-1)} = \frac{1}{V-1} - \frac{1}{V}$, resolvemos

$$\begin{aligned} \int \frac{dV}{V(V-1)} &= \int \frac{dV}{V-1} - \int \frac{dV}{V} \\ &= \ln|V-1| - \ln|V| + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{V-1}{V} \right| + C_1 \end{aligned}$$

donde C_1 es constante. Luego

$$\begin{aligned} -\int \frac{dr}{r} &= \int \frac{dV}{V(V-1)} \\ -\ln|r| + C_2 &= \ln \left| \frac{V-1}{V} \right| + C_1 \end{aligned}$$

con C_2 es constante, equivalentemente

$$\ln \left| \frac{1}{r} \right| + C_3 = \ln \left| \frac{V-1}{V} \right|,$$

luego, aplicando exponencial y considerando $e^{C_3} = C$, con C constante, se obtiene

$$\frac{1}{r} \cdot C = \frac{V-1}{V},$$

por lo tanto

$$V = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}}. \quad (2.15)$$

Para hallar U , reemplazamos V encontrado en la ecuación (2.12) y consideramos que $\frac{1}{V} = 1 - \frac{C}{r}$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial r} \left(1 - \frac{C}{r}\right) + \frac{1}{r} \left(1 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)\right) \\ 0 &= -\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial r} \left(1 - \frac{C}{r}\right) + \frac{C}{r^2} \end{aligned}$$

lo que implica

$$\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{C}{r^2 - rC}.$$

Nuevamente tenemos una ecuación diferencial separable de la forma

$$\frac{dU}{U} = \frac{C dr}{r^2 - rC},$$

por un lado, considerando $\frac{1}{C(r-C)} - \frac{1}{Cr} = \frac{1}{r(r-C)}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int \frac{dr}{r(r-C)} &= \frac{1}{C} \int \frac{dr}{r-C} - \frac{1}{C} \int \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{C} \ln|r-C| - \frac{1}{C} \ln|r| + C_3 \\ &= \frac{1}{C} \ln \left|1 - \frac{C}{r}\right| + C_3, \end{aligned}$$

luego, al resolver la ecuación diferencial se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dU}{U} &= C \int \frac{dr}{r(r-C)} \\ \ln|U| + C_4 &= C \left(\frac{1}{C} \ln \left|1 - \frac{C}{r}\right| + C_3 \right) \\ \ln|U| &= \ln \left|1 - \frac{C}{r}\right| + C_5, \quad \text{con } C_5 = C \cdot C_3, \end{aligned}$$

aplicando exponencial, obtenemos

$$U = \left(1 - \frac{C}{r}\right) C_6, \quad \text{con } C_6 \text{ constante.} \quad (2.16)$$

Por lo tanto, en consideración de las funciones V y U obtenidas en (2.15) y (2.16) respectivamente, re escalando el tiempo $\sqrt{C_6}t \rightarrow t$ nuestra métrica resulta

$$g = -\left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad t \in \mathbb{R}, r \neq C \text{ y } r \neq 0. \quad (2.17)$$

Luego, para $C = 2m$ el llamado **radio de Schwarzschild** se tiene la métrica del Teorema (2.3.1). Además, es fácil ver que cuando $m \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) la métrica se reduce a la métrica de Minkowski en coordenadas esféricas de la ecuación (2.2).

2.5. Ecuaciones de Euler-Lagrange

El término cálculo de variaciones fue acuñado por primera vez por Euler en 1756 como una descripción del método que Joseph Louis Lagrange introdujo el año anterior cuyo objetivo era encontrar mínimos o máximos de funcionales sobre espacios de funciones. Desde entonces, el método fue ampliado y estudiado por Euler, Hamilton, Legendre, Weierstrass y otros.

Para esta sección, consideremos la función C^∞

$$\begin{aligned} u: R \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (x^i) &\longmapsto u^\alpha(x^i), \end{aligned}$$

donde R es abierto y acotado.

Definamos funcionales

$$F(u) = \int_R L\left(x^i, u^\alpha(x^i), \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}(x^i)\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

donde F es una función suave a valores reales de $m + n + mn$ variables.

El problema fundamental del cálculo de variaciones es encontrar funciones u^α que minimicen $F(u)$ y asuman valores dados en ∂R .

Notación: denotaremos a u_{x_I} por u_I , donde $x_I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Teorema 2.5.1. Si $u^\alpha = u^\alpha(x^i)$ es un mínimo de $F(u)$, entonces $u^\alpha = u^\alpha(x^i)$ es una solución a las m ecuaciones de Euler-Lagrange $E_\alpha(L) = 0$ donde

$$E_\alpha(L) = \frac{\partial L}{\partial u^\alpha} - D_I \left(\frac{\partial L}{\partial u_I^\alpha} \right), \quad \text{para } \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad I \text{ es un multi-índice}, \quad (2.18)$$

y D_I es el operador de derivada total definido por

$$D_I = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ji}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots + u_{kji}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{kj}^\alpha} + \dots$$

Es importante notar que los u_I^α son vistos como "coordenadas", así al hacer los cálculos

en la derivada total ellas deben ser consideradas como variables independientes.

Ejemplo 2.5.2. Calcularemos $D_x(u_x^2 + x + u_{yy})$ para $u = u(x, y)$. Según el operador de derivada total, tenemos

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x^i} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxy} \frac{\partial}{\partial u_{xy}} + \dots + u_{xyy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}} + \dots ,$$

considerando los términos que no se anulan, tenemos

$$D_x(u_x^2 + x + u_{yy}) = u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x}(u_x^2) + \frac{\partial}{\partial x}x + u_{xyy} \frac{\partial}{\partial u_{yy}}(u_{yy}) ,$$

luego

$$D_x(u_x^2 + x + u_{yy}) = 2u_x u_{xx} + 1 + u_{xyy}.$$

Ejemplo 2.5.3. Supongamos $L = (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}$. Para hallar u^α que minimice el área de la superficie $z = u(x, y)$, debemos minimizar el funcional

$$F(u) = \int_R (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} dx \wedge dy$$

según las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.18).

Veamos que

$$\begin{aligned} E(L) &= \frac{\partial L}{\partial u} - D_I \left(\frac{\partial L}{\partial u_I} \right) \\ &= -D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - D_y \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right), \end{aligned}$$

y notemos que

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) + u_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \right) + u_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial u_y} \right) + \dots \\ D_y &= \frac{\partial}{\partial y} + u_y \left(\frac{\partial}{\partial u} \right) + u_{yx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \right) + u_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial u_y} \right) + \dots \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_x} &= \frac{\partial}{\partial u_x} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{u_x}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial u_y} &= \frac{\partial}{\partial u_y} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}},\end{aligned}$$

además

$$\frac{\partial}{\partial u_x} \left(\frac{u_x}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1 + u_y^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial u_y} \left(\frac{u_x}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{-u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Similarmente

$$\frac{\partial}{\partial u_x} \left(\frac{u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{-u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial u_y} \left(\frac{u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1 + u_x^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Luego

$$\begin{aligned}D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) &= u_{xx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \left(\frac{u_x}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) + u_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial u_y} \left(\frac{u_x}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \\ &= u_{xx} \left(\frac{1 + u_y^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) - u_{xy} \left(\frac{u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_y \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) &= u_{yx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \left(\frac{u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) + u_{yy} \left(\frac{\partial}{\partial u_y} \left(\frac{u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \right) \\ &= -u_{yx} \left(\frac{u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + u_{yy} \left(\frac{1 + u_x^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right),\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} E(L) &= -D_x \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - D_y \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \\ &= -u_{xx} \left(\frac{1 + u_y^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + u_{xy} \left(\frac{u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + u_{yx} \left(\frac{u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) - u_{yy} \left(\frac{1 + u_x^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

por lo tanto la superficie tiene área mínima si y sólo si

$$u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1 + u_x^2) = 0,$$

y estas son algunas de las ecuaciones de Monge-Ampere las cuales determinan localmente las superficies de área mínima.

Ejemplo 2.5.4. Sea (M, g) una variedad riemanniana, $\sigma(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$ una curva sobre M . Hallaremos la curva que minimiza la energía de una partícula.

La energía total de una partícula que se mueve sobre dicha curva es $\int_{\sigma} \frac{1}{2} \|\dot{\sigma}(t)\|^2 dt$, suponiendo masa $m = 1$. Si $g = (g_{\alpha\beta})_n$ entonces

$$\begin{aligned} L(u_t) &= \frac{1}{2} \|\dot{\sigma}(t)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} u_t^\alpha u_t^\beta, \end{aligned}$$

así encontrar la curva que minimice la energía es hallar el mínimo del funcional

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{\sigma} L(u_t) dt \\ &= \int_{\sigma} \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} u_t^\alpha u_t^\beta dt. \end{aligned}$$

Si σ minimiza a $F(u)$ entonces por las ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene que

$$E_{\gamma}(L) = \frac{\partial L}{\partial u^{\gamma}} - D_T \left(\frac{\partial}{\partial u^{\gamma}} \right) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial u^\gamma} - D_T \left(\frac{\partial}{\partial u_t^\gamma} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} u_t^\alpha u_t^\beta - D_T \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \delta_\gamma^\alpha u_t^\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} u_t^\alpha \delta_\gamma^\beta \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} u_t^\alpha u_t^\beta - D_T \left(\frac{1}{2} g_{\gamma\beta} u_t^\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma} u_t^\alpha \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} u_t^\alpha u_t^\beta - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\phi} u_t^\phi u_t^\beta}_{\text{si } \phi=\alpha} - \underbrace{\frac{1}{2} g_{\gamma\beta} u_{tt}^\beta}_{\text{si } \beta=\alpha} - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\phi} u_t^\phi u_t^\alpha}_{\text{si } \phi=\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\gamma} u_{tt}^\alpha \\
&= -g_{\alpha\gamma} u_{tt}^\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} \right) u_t^\alpha u_t^\beta.
\end{aligned}$$

Así $E_\gamma(L) = 0$ si y solo si

$$g_{\alpha\gamma} u_{tt}^\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right) u_t^\alpha u_t^\beta = 0,$$

y multiplicando por $g^{v\gamma}$, tenemos

$$\begin{aligned}
g^{v\gamma} g_{\alpha\gamma} u_{tt}^\alpha + \frac{1}{2} g^{v\gamma} \left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right) u_t^\alpha u_t^\beta &= 0 \\
\delta_\alpha^v u_{tt}^\alpha + \frac{1}{2} g^{v\gamma} \left(\frac{\partial g_{\gamma\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right) u_t^\alpha u_t^\beta &= 0, \text{ para } v = 0, 1, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

luego

$$u_{tt}^v + \Gamma_{\alpha\beta}^v u_t^\alpha u_t^\beta = 0, \text{ para } v = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.19)$$

Concluimos que las curvas que minimizan la energía son las geodésicas de (M, g) .

2.6. Geodésicas de Schwarzschild

Existen dos caminos para estudiar las geodésicas de Schwarzschild: calcular los símbolos Γ_{ij}^k y reemplazar en (2.19) lo que resulta poco práctico, o bien, usando el principio variacional, más concretamente, usando las ecuaciones de Euler-Lagrange $E_\alpha(L) = 0$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$, es decir

$$\frac{\partial L}{\partial u^\alpha} = D_T \left(\frac{\partial L}{\partial u_t^\alpha} \right). \quad (2.20)$$

Si $\gamma(\tau) = (t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$ es una curva en el espacio de Schwarzschild, nuestro Langrangiano L a estudiar es

$$\begin{aligned} L(t, r, \theta, \phi, \dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) &= \begin{pmatrix} \dot{t} & \dot{r} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{t} \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2, \end{aligned}$$

donde $\dot{}$ significa derivar respecto a τ , variable independiente. Si $u^0(\tau) \equiv t(\tau)$ y como $u_t^0(\tau) = \frac{d}{d\tau}(u^0(\tau)) = \frac{dt(\tau)}{d\tau} = \dot{t}$, entonces (2.20) implica que para $\alpha = 0$ se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = 0, \quad (2.21)$$

además, (2.21) implica que

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(- \left(1 - \frac{2m}{r} \right) 2\dot{t} \right) \\
 &= \frac{d}{d\tau} \left(-2\dot{t} + \frac{4m}{r} \dot{t} \right) \\
 &= -2\ddot{t} + \left(\frac{r\ddot{t} - \dot{r}\dot{t}}{r^2} \right) 4m, \quad \text{donde } \ddot{t} := \frac{d^2 t}{d\tau^2} \\
 &= -2\ddot{t} + \frac{4m\ddot{t}}{r} - \frac{4m\dot{r}\dot{t}}{r^2} \\
 &= 2 \left(-1 + \frac{2m}{r} \right) \ddot{t} - \frac{4m\dot{r}\dot{t}}{r^2} \\
 &= -2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \ddot{t} - \frac{4m\dot{r}\dot{t}}{r^2} \\
 &= \ddot{t} + \frac{2m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)} \dot{r}\dot{t}.
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Note que esta última ecuación implica que en la variedad de Schwarzschild, se tiene

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{m}{r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)}.$$

Por otro lado, de la ecuación (2.20) y $u^1(\tau) = r(\tau)$, tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = 0,$$

como

$$\frac{\partial L}{\partial r} = -\frac{2m}{r} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-2} \left(\frac{2m}{r} \right) \dot{r}^2 + 2r\dot{\theta}^2 + 2r\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

entonces

$$0 = -\frac{2m}{r} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-2} \left(\frac{2m}{r} \right) \dot{r}^2 + 2r\dot{\theta}^2 + 2r\sin^2\theta\dot{\phi}^2 - \frac{d}{d\tau} \left[\left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} 2\dot{r} \right]. \tag{2.23}$$

Ahora, de la ecuación (2.20) y $u^2(\tau) = \phi(\tau)$ se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0,$$

de donde obtenemos

$$0 = 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 - \frac{d}{d\tau}(2r\dot{\theta}). \quad (2.24)$$

Finalmente, para $u^3(\tau) = \phi(\tau)$ tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0,$$

luego

$$0 = \frac{d}{d\tau} (2r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}). \quad (2.25)$$

El operador de Euler-Lagrange nos permite hallar soluciones fácilmente, pues las ecuaciones de (2.22), (2.23), (2.24) y (2.25) implican

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} \right) = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(\left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \dot{r} \right) = \frac{m}{r^2} \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-2} \frac{m}{r^2} \dot{r} + r \dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2, \quad (2.27)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, \quad (2.28)$$

$$\frac{d}{d\tau} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (2.29)$$

De (2.26) y (2.29)

$$\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t} = E \quad (2.30)$$

y

$$r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = J, \quad (2.31)$$

con E y J constantes de movimiento. Además, otra constante de movimiento es

$$L(\tau) = - \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \quad (2.32)$$

cuando parametrizamos por longitud de arco se tiene $||L(\tau)|| = 1$.

Para simplificar un poco las cosas, mostraremos que el movimiento es plano. Con-

siderando cualquier geodésica y pensando en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) sobre $\mathbb{R}^3$, el vector posición inicial no se asume en el origen pues la métrica es singular en $r = 0$. Notemos que $\theta(\tau) = 0$ y $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$ satisfacen (2.28) pues $\cos\theta \sin\theta = 0$ si y solo si $\theta = 0 \vee \theta = \frac{\pi}{2}$. Además $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$ significa que si la órbita de una geodésica pasa por el plano ecuatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$, dicha geodésica permanece en el plano para todo τ . Así, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$ y de las ecuaciones (2.30) (2.31) y (2.32) tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\tau} &= \frac{E}{1 - \frac{2m}{r}}, \\ \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{J}{r^2}, \\ L &= -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2,\end{aligned}\tag{2.33}$$

donde $L = 1$ para geodésicas tipo tiempo y $L = 0$ para geodésicas tipo luz (fotones). Dado que

$$\dot{t} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = E$$

y

$$\dot{\phi} r^2 = J,$$

reemplazando en (2.33)

$$L = -E\dot{t} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \dot{\phi} J.$$

Ahora, estudiaremos una geodésica tipo tiempo en el plano ecuatorial. En este caso $L = -1$, así

$$\begin{aligned}-1 &= -E\dot{t} + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \dot{\phi} J \\ \dot{r}^2 &= (-1 + E\dot{t} - J\dot{\phi}) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\ \dot{r}^2 &= -1 + \frac{E^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - \frac{J^2}{r^2} \\ \dot{r}^2 &= E^2 - \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\ \dot{r}^2 &= E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{J^2}{r^2} + 1\right).\end{aligned}\tag{2.34}$$

Para movimiento radial (partícula en caída libre) ϕ es constante, por lo que $\frac{d\phi}{d\tau} = 0$ y entonces $J = 0$, luego

$$\dot{r}^2 = E^2 - 1 + \frac{2m}{r}. \quad (2.35)$$

Si una partícula se deja caer desde el reposo para $r = R$, con $\dot{r} = 0$, se tiene de (2.35)

$$E^2 = 1 - \frac{2m}{R}, \quad (2.36)$$

donde

$$R = \frac{2m}{1 - E^2}$$

es el radio en el que la partícula tiene velocidad cero. Luego (2.35) queda

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= \left(1 - \frac{2m}{R}\right) - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \\ &= \left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}\right), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= \sqrt{\left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2m(R-r)}{rR}}, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2m(R-r)}{rR}}} dr \\ &= \sqrt{\frac{rR}{2m(R-r)}} dr, \end{aligned}$$

luego

$$\tau = \sqrt{\frac{R}{2m}} \int \sqrt{\frac{r}{R-r}} dr. \quad (2.37)$$

El movimiento sigue el principio cicloidal [ver [8]]. Para resolver esta integral, sea

$r = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta)$ y $dr = -\frac{R}{2} \sin \eta d\eta$, reemplazando

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{r}{R-r}} dr &= \int \sqrt{\frac{\frac{R}{2}(1 + \cos \eta)}{R - \frac{R}{2}(1 + \cos \eta)}} \left(-\frac{R}{2} \sin \eta d\eta \right) \\
 &= -\frac{R}{2} \int \sqrt{\frac{1 + \cos \eta}{1 - \cos \eta}} \sin \eta d\eta \\
 &= -\frac{R}{2} \int \sqrt{\frac{(1 + \cos \eta)^2}{1 - \cos^2 \eta}} \sin \eta d\eta \\
 &= -\frac{R}{2} \int \sqrt{\frac{(1 + \cos \eta)^2}{\sin^2 \eta}} \sin \eta d\eta \\
 &= -\frac{R}{2} \int \frac{|1 + \cos \eta|}{|\sin \eta|} \sin \eta d\eta.
 \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, escogemos el cuarto cuadrante donde $\cos \eta > 0$ y $\sin \eta < 0$, luego

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{r}{R-r}} dr &= -\frac{R}{2} \int \frac{1 + \cos \eta}{-\sin \eta} \sin \eta d\eta \\
 &= \frac{R}{2} \int (1 + \cos \eta) d\eta \\
 &= \frac{R}{2} (\eta + \sin \eta),
 \end{aligned}$$

por lo tanto, de (2.37) resulta

$$\tau = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{2m}} (\eta + \sin \eta). \quad (2.38)$$

Considerando el tiempo propio total a caer desde el reposo $r = R$ hasta $r = 0$, dado por la expresión

- $r = R$ si $\cos \eta = 1$. Así $\eta = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$
- $r = 0$ si $\cos \eta = -1$. Así $\eta = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}_0^+$

esto es, límites de integración para τ entre $r = R$ y $r = 0$. Luego, el tiempo propio total

está dado por la expresión

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{2m}} (\eta + \sin \eta) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{\pi R}{2} \sqrt{\frac{R}{2m}}.\end{aligned}$$

Ahora, ¿qué sucede con el tiempo t para un determinado movimiento?. Consideremos (2.30) tal que

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\tau} &= \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ &= \frac{dr}{dt} \left(\frac{E}{1 - \frac{2m}{r}} \right) \\ &= E \frac{dr^*}{dt}, \quad \text{con } dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}},\end{aligned}\tag{2.39}$$

donde

$$\begin{aligned}r^* &= \int dr^* \\ &= \int \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}}\end{aligned}$$

es una nueva coordenada de tortuga propuesta por Wheeler (ver [10]). Además, dado que

$$\frac{1}{1 - \frac{2m}{r}} = \frac{r}{r-2m} \quad \text{y} \quad \frac{2m}{r-2m} + \frac{r-2m}{r-2m} = \frac{r}{r-2m}, \quad \text{tenemos}$$

$$\begin{aligned}r^* &= \int \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} \\ &= \int \frac{r dr}{r-2m} \\ &= \int \left(\frac{2m}{r-2m} + 1 \right) dr \\ &= \int \frac{2m}{r-2m} dr + \int dr \\ &= 2m \ln|r-2m| + r + K, \quad \text{con } K \text{ constante.}\end{aligned}$$

Luego, reemplazando (2.39) en (2.34)

$$\left(E \frac{dr^*}{dt}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{J^2}{r^2} + 1\right),$$

de donde

$$dt = \frac{E}{\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(\frac{J^2}{r^2} + 1\right)}} dr^*, \quad \text{con } dr^* = \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}},$$

reemplazando (2.36) e integrando esta expresión, tenemos

$$t = \int \frac{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}}{\sqrt{\left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}\right) \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}} \frac{dr}{r}, \quad (2.40)$$

calculamos usando nuevamente $r = \frac{R}{2}(1 + \cos \eta)$, $dr = -\frac{R}{2} \sin \eta d\eta$ y dado que

$$\sqrt{\left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}\right)} = \sqrt{\frac{2m}{R}} \frac{\sin \eta}{1 + \cos \eta},$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 - \frac{2m}{R}}}{\left(\frac{2m}{r} - \frac{2m}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)} dr &= \frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \int \frac{\cos \eta + 1}{\left(1 - 4 \frac{m}{R(\cos \eta + 1)}\right)} d\eta \\ &= \frac{R^2}{2} \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \int \frac{(\cos \eta + 1)^2}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta \\ &= \frac{R^2}{2} \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \int \frac{(\cos \eta + 1)^2}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta. \end{aligned}$$

Calculemos

$$\int \frac{(\cos \eta + 1)^2}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta,$$

dado que

$$\begin{aligned} \frac{(\cos \eta + 1)^2}{R(\cos \eta + 1) - 4m} &= \frac{(\cos \eta + 1)^2 - \frac{16m^2}{R^2} + \frac{16m^2}{R^2}}{R(\cos \eta + 1) - 4m} \\ &= \frac{\frac{1}{R^2} (R^2 (\cos \eta + 1)^2 - 16m^2)}{R(\cos \eta + 1) - 4m} + \frac{\frac{16m^2}{R^2}}{R(\cos \eta + 1) - 4m}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\int \frac{(\cos \eta + 1)^2}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta \quad (2.41) \\ &= \int \frac{1}{R^2} (R(\cos \eta + 1) + 4m) d\eta + \frac{16m^2}{R^2} \int \frac{1}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta \\ &= \frac{1}{R^2} (R \sin \eta + R\eta + 4m\eta) + \frac{16m^2}{R^2} \int \frac{1}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta, \end{aligned}$$

y calculando esta última integral, tenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta &= \int \frac{1}{R \cos \eta + R - 4m} d\eta \\ &= \frac{1}{R - 4m} \int \frac{1}{1 + \frac{R}{R - 4m} \cos \eta} d\eta \\ &= \frac{1}{R - 4m} \int \frac{1}{1 + A \cos \eta} d\eta, \quad \text{con } A = \frac{R}{R - 4m}. \quad (2.42) \end{aligned}$$

Ahora hallemos

$$\int \frac{1}{1 + A \cos \eta} d\eta,$$

usando la sustitución de Weierstrass $u = \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)$, tenemos $\eta = 2 \arctan(u)$, de donde $d\eta = \frac{2}{u^2 + 1} du$ y $\cos(\eta) = \frac{1 - u^2}{u^2 + 1}$. Entonces

$$\int \frac{1}{1 + A \cos \eta} d\eta = \int \frac{2du}{(u^2 + 1) \left(1 + A \left(\frac{1 - u^2}{u^2 + 1}\right)\right)} = \int \frac{2du}{(1 - A)u^2 + (1 + A)},$$

si $A > 1$ entonces consideremos $1 + A = p^2$ y $1 - A = -q^2$, así

$$\int \frac{2du}{(1 - A)u^2 + (1 + A)} = 2 \int \frac{du}{p^2 - q^2 u^2},$$

luego, sea $u = \frac{p}{q}v$, $du = \frac{p}{q}dv$ tal que

$$2 \int \frac{du}{p^2 - q^2 u^2} = 2 \int \frac{\frac{p}{q} dv}{p^2(1 - v^2)} = \frac{2}{pq} \int \frac{dv}{(1 - v^2)}$$

y dado que $\frac{1}{1-v} + \frac{1}{1+v} = \frac{1}{1-v^2}$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{pq} \int \frac{dv}{(1 - v^2)} &= \frac{2}{pq} \left[\frac{1}{2} \int \frac{dv}{(1 - v)} + \frac{1}{2} \int \frac{dv}{(1 + v)} \right] \\ &= \frac{1}{pq} \left[- \int \frac{dv}{(1 - v)} + \int \frac{dv}{(1 + v)} \right] \\ &= \frac{1}{pq} [-\ln|1 - v| + \ln|1 + v|] \\ &= \frac{1}{pq} \left[\ln \left| \frac{1 + v}{1 - v} \right| \right] \\ &= \frac{1}{pq} \left[\ln \left| \frac{p + qu}{p - qu} \right| \right], \text{ con } v = \frac{q}{p}u, \\ &= \frac{1}{\sqrt{A^2 - 1}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{1 + A} + (\sqrt{A - 1}) \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{1 + A} - (\sqrt{A - 1}) \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right], \end{aligned}$$

donde $p = \sqrt{1 + A}$, $q = \sqrt{A - 1}$ y $u = \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)$, respectivamente.

Como $A = \frac{R}{R - 4m}$, tenemos la expresión

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{R - 4m}\right)^2 - 1}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{R - 4m}\right)} + \left(\sqrt{\left(\frac{R}{R - 4m}\right) - 1}\right) \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{R - 4m}\right)} - \left(\sqrt{\left(\frac{R}{R - 4m}\right) - 1}\right) \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R}{R - 4m}\right)^2 - 1}} \left[\ln \left| \frac{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{R - 4m}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{R - 4m}\right) - 1}} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{R - 4m}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{R}{R - 4m}\right) - 1}} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right], \end{aligned}$$

notemos que

$$\frac{1 + \left(\frac{R}{R - 4m}\right)}{\left(\frac{R}{R - 4m}\right) - 1} = \frac{\frac{R - 4m + R}{R - 4m}}{\frac{R - (R - 4m)}{R - 4m}} = \frac{(2R - 4m)(R - 4m)}{(R - 4m)(4m)} = \frac{R - 2m}{2m} = \frac{R}{2m} - 1,$$

por lo que la expresión (2.42) resulta

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R-4m} \int \frac{1}{1+A\cos\eta} d\eta &= \frac{1}{(R-4m)\sqrt{\left(\frac{R}{R-4m}\right)^2-1}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{R^2-(R-4m)^2}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{8m(R-2m)}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right],
 \end{aligned}$$

y reemplazando en (2.41)

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{(\cos\eta+1)^2}{R(\cos\eta+1)-4m} d\eta \\
 &= \frac{1}{R^2} (R\sin\eta + R\eta + 4m\eta) + \frac{16m^2}{R^2} \int \frac{1}{R(\cos\eta+1)-4m} d\eta \\
 &= \frac{1}{R^2} (R\sin\eta + R\eta + 4m\eta) + \frac{16m^2}{R^2} \frac{1}{\sqrt{8m(R-2m)}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2m}-1} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right].
 \end{aligned}$$

Finalmente, remplazando en (2.40)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{1 - \frac{R}{2M}}}{\left(\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr \\
&= \frac{R^2}{2} \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \int \frac{(\cos \eta + 1)^2}{R(\cos \eta + 1) - 4m} d\eta \\
&= \frac{R^2}{2} \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \left(\frac{1}{R^2} (R \sin \eta + R\eta + 4m\eta) + \frac{16m^2}{R^2} \frac{1}{\sqrt{8m(R-2m)}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right| \right] \right) \\
&= \left(\frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \right) \sin \eta + \left(\left(\frac{R}{2} + 2m \right) \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \right) \eta \\
&\quad + \left(\frac{R^2}{2} \left(\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \right) \frac{16m^2}{R^2} \frac{1}{\sqrt{8m(R-2m)}} \right) \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right|,
\end{aligned}$$

donde se tiene que

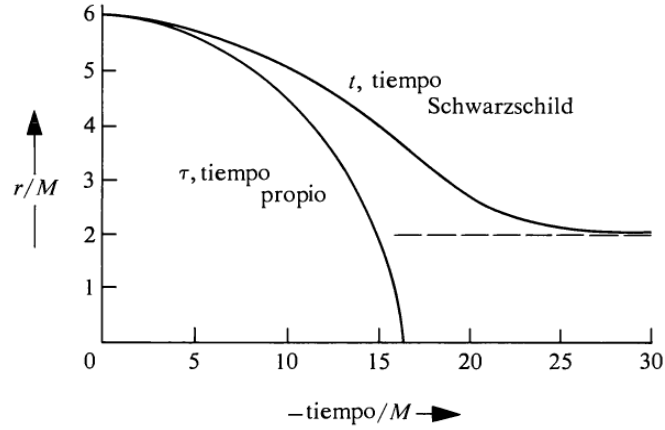
$$\left(\frac{R^2}{2} \left(\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \right) \frac{16m^2}{R^2} \frac{1}{\sqrt{8m(R-2m)}} \right) = \frac{8m^2 \sqrt{R-2m}}{\sqrt{2m} \sqrt{8m(R-2m)}} = 2m.$$

Por lo tanto, la solución a la integral es

$$t = \left(\frac{R}{2} \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \right) \sin \eta + \left(\left(\frac{R}{2} + 2m \right) \sqrt{\frac{R}{2m} - 1} \right) \eta + 2m \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} + \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)}{\sqrt{\frac{R}{2m} - 1} - \tan\left(\frac{\eta}{2}\right)} \right|. \quad (2.43)$$

Resultado que relaciona la coordenada de tiempo de Schwarzschild con el radio R en el que la partícula tiene velocidad cero [8].

Así, para un observador estacionario en el "infinito" una partícula tarda un tiempo t infinito en llegar al horizonte, mientras que para el tiempo propio τ la partícula llegaría al horizonte en un tiempo finito e incluso llegaría a la singularidad en un tiempo finito.



En la imagen, un observador en caída libre hacia un agujero negro de Schwarzschild descrito a través del tiempo propio τ y por otro lado un observador lejano descrito por la coordenada de tiempo de Schwarzschild t . Podemos notar de la ecuación (2.38) que $r = 0$ es alcanzado y rápidamente, mientras que en la descripción según la ecuación (2.43) $r = 0$ nunca se alcanza mientras que a $r = 2m$ se acerca asintóticamente.

Conclusiones

Hemos visto que la métrica de Schwarzschild describe el campo gravitacional en el exterior de las estrellas esféricamente simétricas y en su derivación hemos requerido que el espacio-tiempo fuera esféricamente simétrico y vacío de materia solo en aquellos puntos donde calculamos la solución. Por otro lado, la métrica al interior de una estrella con tales condiciones será diferente de la métrica de Schwarzschild, es decir, se debe analizar lo que sucede en $r = 0$ y $r = 2m$ donde la métrica es singular.

Basado en argumentos físicos, tiene sentido pensar en que los conos de luz apunten hacia $r = 0$, ya que esperamos que el campo gravitacional “atrae” a los objetos hacia el centro. Sin embargo, no tenemos una prueba matemática para esto.

Nuestros cálculos realizados en la métrica de Schwarzschild revelaron datos interesantes, pero encontramos dificultades considerables para $r = 2m$. La herramienta clave para seguir avanzando es cambiar a un nuevo sistema de coordenadas “tortuga”. Sin embargo, con las coordenadas de Eddington - Finkelstein de entrada a la región $r = 2m$, se puede probar que todos los conos de luz apuntando al futuro se inclinan hacia adentro en el interior de $\{r \leq 2m\}$ y que, por lo tanto, todas las curvas geodésicas nulas y temporales caen hacia adentro. Por otro lado, usando las coordenadas de Eddington - Finkelstein de salida a la región $r = 2m$ se puede probar que todos los conos de luz que apuntan en el futuro dentro de $\{r \leq 2m\}$ apuntan hacia afuera. Ahora, si por construcción, el espacio-tiempo de Schwarzschild es estático y por lo tanto deberíamos esperar reflexiones de tiempo tipo $t \mapsto -t$, entonces ¿Qué está pasando y cuál de los resultados es correcto?

Al parecer ambos son correctos y para comprender este problema, se debe combinar las coordenadas de Eddington - Finkelstein de entrada y de salida en una nueva transformación de coordenadas: las coordenadas de Kruskal-Szekeres.

Bibliografía

- [1] BISHOP, R., AND GOLDBERG, S. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Publications, 1980.
- [2] CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An introduction to General Relativity*. Pearson, 2004.
- [3] CHRUŚCIEL, P. *Elements of General Relativity*. Birkhäuser, 2019.
- [4] DAS, A. *The Special Theory of Relativity: A Mathematical Exposition*. Springer-Verlag, 1993.
- [5] DO-CARMO, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [6] HICKS, N. *Notes on Differential Geometry*. Van Nostrand Reinhold Company, Inc., 1965.
- [7] LEE, J. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Springer - Verlag, 1997.
- [8] LINDQUIST, R., AND WHEELER, J. Dynamics of a Lattice Universe by the Schwarzschild-Cell Method. *Reviews of Modern Physics* 29 (1957), 432–443.
- [9] MILLMAN, R., AND PARKER, G. *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, 1977.
- [10] MISNER, C., THORNE, K., AND WHEELER, J. *Gravitation*. W.H. Freeman and company, 1973.
- [11] O’NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with applications to Relativity*. Pure and applied mathematics. Academic Press, 1983.

-
- [12] SACHS, R., AND WU, H. *General Relativity for Mathematicians*. Springer-Verlag, 1977.
 - [13] SBIERSKI, J. The C^0 -inextendibility of the Schwarzschild spacetime and the spacelike diameter in Lorentzian Geometry. *J. Differ. Geom.* 108 (2018), 319–378.
 - [14] SPIVAK, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1*, 3rd Edition. Publish or Perish, Inc., 1999.
 - [15] STEENROD, N. *Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press, 1960.